

Системи двох рівнянь із двома змінними – 2

Якщо у системі одне з рівнянь є рівнянням першого степеня, то таку систему можна розв'язувати способом підстановки.

*Алгоритм розв'язування системи двох рівнянь
із двома змінними **методом підстановки***



1. Виразити одну змінну через іншу з одного рівняння системи.
2. Підставити отриманий вираз замість відповідної змінної у друге рівняння системи.
3. Розв'язати отримане рівняння з однією змінною: знайти один або кілька коренів (залежно від рівняння).
4. Підставити почергово кожний зі знайдених коренів рівняння у вираз, отриманий у п. 1.
5. Записати відповідь у вигляді пар значень змінних, знайдених у п. 3, 4.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} y^2 - x = -1, \\ x - y = 3. \end{cases}$

Розв'язання:

I спосіб:

Додамо перше та друге рівняння системи.

$$+ \begin{cases} y^2 - x = -1, \\ x - y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 - y = 2, \\ x - y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 - y - 2 = 0, \\ x - y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} \begin{cases} y=2, \\ y=-1, \end{cases} \\ x = y + 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, \\ y = 2, \\ x = 2, \\ y = -1; \end{cases} \quad (5; 2); (2; -1).$$

II спосіб:

Розв'яжемо систему методом підстановки.

$$\begin{cases} y^2 - x = -1, \\ x - y = 3. \end{cases} \quad \begin{cases} x = y^2 + 1, \\ y^2 + 1 - y = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} x = y^2 + 1, \\ y^2 - y - 2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x = y^2 + 1, \\ y = 2, \\ y = -1; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5, \\ y = 2, \\ x = 2, \\ y = -1; \end{cases} \quad (5; 2); (2; -1).$$

Відповідь: (5; 2); (2; -1).

Приклад 2. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x - y = 4; \end{cases}$

Розв'язання:

У конспекті минулого уроку цю систему було розв'язано графічно.

Запропонуємо аналітичні способи розв'язування даної системи:

I спосіб:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x - y = 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (4+y)^2 + y^2 = 16, \\ x = 4+y; \end{cases} \quad \begin{cases} 16 + 8y + y^2 + y^2 = 16, \\ x = 4+y; \end{cases} \quad \begin{cases} 2y^2 + 8y = 0, \\ x = 4+y; \end{cases} \quad \begin{cases} y(y+4) = 0, \\ x = 4+y; \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0, \\ y = -4, \\ x = 4+y; \end{cases} \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = 0, \\ x = 0, \\ y = -4; \end{cases} \quad (4; 0); (0; -4)$$

II спосіб:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16, \\ x - y = 4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-y)^2 + 2xy = 16, \\ x - y = 4; \end{cases} \begin{cases} xy = 0, \\ x - y = 4; \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ y = -4, \\ x = 4, \\ y = 0; \end{cases} (0; -4); (4; 0).$$

Відповідь: $(0; -4); (4; 0)$.

Приклад 3. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = -6; \end{cases}$

Розв'язання:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ xy = -6; \end{cases} + \begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ 2xy = -12; \end{cases} \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 1, \\ xy = -6; \end{cases} \begin{cases} (x+y)^2 = 1, \\ xy = -6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=1, \\ xy=-6, \\ x+y=-1, \\ xy=-6; \end{cases} \begin{cases} x=3, \\ y=-2, \\ x=-2, \\ y=3, \\ x=-3, \\ y=2, \\ x=2, \\ y=-3; \end{cases} (3; -2); (-2; 3); (-3; 2); (2; -3).$$

Відповідь: $(3; -2); (-2; 3); (-3; 2); (2; -3)$.

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 - y^2 = 8, \\ x - y = 4. \end{cases}$

Розв'язання:

I спосіб

$$\begin{cases} (4+y)^2 - y^2 = 8, \\ x = 4+y; \end{cases} \begin{cases} 16 + 8y + y^2 - y^2 = 8, \\ x = 4+y; \end{cases} \begin{cases} 8y = -8, \\ x = 4+y; \end{cases} \begin{cases} y = -1, \\ x = 3; \end{cases} (3; -1).$$

II спосіб

$$\begin{cases} (x-y) \cdot (x+y) = 8, \\ x - y = 4; \end{cases} \pm \begin{cases} x+y=2, \\ x-y=4; \end{cases} \begin{cases} 2x=6, \\ 2y=-2; \end{cases} \begin{cases} x=3, \\ y=-1; \end{cases} (3; -1).$$

Відповідь: $(3; -1)$.

Приклад 5. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ 3x = 4y; \end{cases}$

Розв'язання:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ 3x = 4y; \end{cases} \begin{cases} x^2 + \frac{9x^2}{16} = 100, \\ y = \frac{3x}{4}; \end{cases} \begin{cases} \frac{25x^2}{16} = 100, \\ y = \frac{3x}{4}; \end{cases} \begin{cases} x^2 = 64, \\ y = \frac{3x}{4}; \end{cases} \begin{cases} x = 8, \\ y = 6, \\ x = -8, \\ y = -6; \end{cases} (8; 6); (-8; -6).$$

Відповідь: $(8; 6); (-8; -6)$.

Приклад 6. Розв'язати систему рівнянь $\begin{cases} xy+x=56, \\ xy+y=54; \end{cases}$

Розв'язання:

$$\begin{cases} xy+x=56, \\ xy+y=54; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=2, \\ xy+y=54; \end{cases} \quad \begin{cases} x=2+y, \\ y(2+y)+y=54; \end{cases} \quad \begin{cases} x=y+2, \\ y^2+2y+y=54; \end{cases} \quad \begin{cases} x=y+2, \\ y^2+3y-54=0; \end{cases} \quad \begin{cases} x=y+2, \\ y=-9, \\ y=6; \end{cases} \quad \begin{cases} x=-7, \\ y=-9, \\ x=8, \\ y=6; \end{cases} \quad (-7;9); (8;6).$$

Відповідь: $(-7;9); (8;6)$.

Вправи для самотренування

Вправи для самотренування:

1. Розв'яжіть системи рівнянь, використовуючи аналітичні методи:

а) $\begin{cases} y^2 - x = 14, \\ x - y = -2; \end{cases}$

б) $\begin{cases} y = x^2 - 4, \\ 2x + y = -1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = -1, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} xy + y = 30, \\ xy + x = 28. \end{cases}$