Системи двох рівнянь із двома змінними – 3

Метод заміни змінної для розв'язування систем рівнянь
можна застосувати таким чином:

1) Ввести *одну нову змінну* і використати заміну тільки в *одному* рівнянні системи.

Наприклад: для розв'язання системи

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2;$$
$$x^2+y^2=2$$

вводимо одну змінну $t=\frac{x}{y}$. Перше рівняння матиме вигляд:

$$t+\frac{1}{t}=2.$$

2) Або ввести *дві нові змінні* і використати їх одночасно в *обох* рівняннях системи.

Наприклад: для розв'язання системи

$$\begin{cases}\frac{2}{x-2y}+\frac{3}{3x+y}=3;\\ \frac{4}{x-2y}-\frac{9}{3x+y}=1\end{cases}$$

вводимо дві змінні:

$$a=\frac{2}{x-2y},\ b=\frac{3}{3x+y}.$$

Враховуючи, що $\frac{4}{x-2y}=2a,\quad \frac{9}{3x+y}=3b$, записуємо систему у вигляді:

$$\begin{cases}a+b=3;\\ 2a-3b=1.\end{cases}$$

Приклад 1. Розв'яжіть систему рівнянь $\begin{cases}\frac{x-y}{y}+\frac{y}{x-y}=2;\\ (x+2)(y-3)=-6.\end{cases}$

Розв'язання:

Знайдемо ОДЗ системи рівнянь, визначивши ОДЗ змінних кожного рівняння.

ОДЗ: $\begin{cases}y\neq 0;\\ x\neq y.\end{cases}$

Розглянемо перше рівняння системи.

Введемо нову змінну та розв'яжемо відносно неї отримане рівняння, враховуючи ОДЗ нової змінної.

Заміна: $\frac{x-y}{y}=t$, тоді $\frac{y}{x-y}=\frac{1}{t}$.

$$t+\frac{1}{t}=2;\quad \begin{cases}t^2-2t+1=0,\\ t\neq 0;\end{cases}\Rightarrow t=1.$$

Повернемося до початкових змінних. Утворимо систему з отриманого рівняння та другого рівняння початкової системи.

$$\frac{x-y}{y}=1\Rightarrow\quad x-y=y\Rightarrow x=2y;$$
$$\begin{cases}x=2y,\\ (x+2)(y-3)=-6.\end{cases}$$

Розв'яжемо отриману систему метод підстановки: підставимо у друге рівняння системи $x=2y$ і розв'яжемо отримане квадратне рівняння.

$$(2y+2)(y-3)=-6,$$
$$2y^2-6y+2y-6=-6,$$

$$2y^2 - 4y = 0,$$
$$2y(y-2) = 0,$$
$$y_1 = 0, \text{ або } y_2 = 2.$$

Проаналізуємо отримані значення y. Обчислимо значення x, яке відповідає знайденому значенню y.

$y = 0$ не задовольняє ОДЗ, отже $y = 2 \Rightarrow x = 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow (4; 2)$.

Відповідь: $(4; 2)$

Приклад 2. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + y - xy = 1; \\ xy(x+y) = 20. \end{cases}$$

Розв'язання:

Зауважимо, що дана система не зміниться, якщо замінити x на y, а y на x. Такі системи називаються симетричними. І для їх розв'язування може виявитися ефективною заміна

$$x + y = u,\ xy = v.$$

Виконаємо зазначену заміну. Отримаємо систему:

$$\begin{cases} u - v = 1, \\ v \cdot u = 20. \end{cases}$$

Звідси (розв'яжіть методом підстановки), маємо

$$\begin{cases} u = -4, \\ v = -5; \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} u = 5, \\ v = 4. \end{cases}$$

Повернувшись до заміни, маємо дві системи:

$$\begin{cases} x + y = -4, \\ xy = -5; \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 4. \end{cases}$$

Розв'язавши ці системи методом підстановки, розв'язками першої з них є пари чисел (–5;1) та (1;–5), а розв'язками другої – (1;4) та (4;1).

Відповідь: (–5;1), (1;–5), (1;4), (4;1).

Приклад 3. Розв'яжіть систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy - \dfrac{x}{y} = 6; \\ 3xy + \dfrac{2x}{y} = 28. \end{cases}$$

Розв'язання:

Зробимо заміну. Нехай

$$a = xy,\ b = \frac{x}{y}.$$

Маємо:

$$\begin{cases} a - b = 6; \\ 3a + 2b = 28; \end{cases} \Bigg| \times \mathbf{2} \qquad \begin{cases} 2a - 2b = 12; \\ 3a + 2b = 28. \end{cases}$$

Почленно додавши рівняння системи, матимемо:

$$5a = 40 \Rightarrow a = 8;\ \ b = a - 6, b = 2.$$

Повернувшись до заміни, одержимо:

$$\begin{cases} xy = 8, \\ \dfrac{x}{y} = 2; \end{cases} \begin{cases} xy = 8, \\ x = 2y; \end{cases} \begin{cases} 2y \cdot y = 8, \\ x = 2y; \end{cases} \begin{cases} y^2 = 4, \\ x = 2y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_1 = 2, \\ x_1 = 4; \end{cases} \begin{cases} y_1 = -2, \\ x_1 = -4. \end{cases}$$

Відповідь: $(4;2);(-4;-2.)$

Вправи для самотренування:

1. Розв'яжіть системи рівнянь, використовуючи метод заміни змінної:

а) $\begin{cases} \frac{x+y}{x} + \frac{4x}{x+y} = 4; \\ (x-4)(y+3) = 9. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x + 2y - xy = 4; \\ xy(x+y) = 6. \end{cases}$

в) $\begin{cases} xy - \frac{x}{y} = 9; \\ 2xy + \frac{x}{3y} = 23. \end{cases}$