

Системи двох рівнянь з двома змінними як математична модель прикладної задачі

Алгоритм розв'язування текстової задачі за допомогою системи рівнянь

1. Проаналізувати умову задачі (основні величини, зв'язки між ними, вимоги задачі).
2. Створити математичну модель (у вигляді таблиці, рисунка, тексту тощо).
3. Скласти систему рівнянь до задачі.
4. Розв'язати отриману систему рівнянь.
5. Проаналізувати отримані результати з огляду на умову задачі.
6. Записати відповідь.

Задача 1:

Відомо, що два числа в добутку дають 16, а сума їх квадратів дорівнює 68. Знайти ці числа.

Проаналізуємо умову задачі: Основні величини - два числа, над якими виконуються певні дії. Позначимо перше число за x , а друге - за y .

Тоді добуток чисел буде xy . Сума квадратів: $x^2 + y^2$.

За умовою добуток чисел $xy=16$, $x^2 + y^2=68$.

Складемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy = 16 \\ x^2 + y^2 = 68 \end{cases}$$

Виразимо з першого рівняння системи y і підставимо в друге рівняння системи:

$$\begin{cases} y = \frac{16}{x} \\ x^2 + \left(\frac{16}{x}\right)^2 = 68 \end{cases}$$

Розв'яжемо друге рівняння системи:

$$x^2 + \frac{256}{x^2} = 68$$

Домножимо все рівняння на x^2 :

$$x^4 - 68x^2 + 256 = 0$$

Зробимо заміну, врахувавши, що x^2 може бути лише додатнім (якщо буде дорівнювати 0, то не справдиться умова про добуток чисел)

$$\text{Заміна: } x^2 = t, t > 0$$

$$t^2 - 68t + 256 = 0$$

Розв'яжемо за теоремою, оберненою до теореми Вієта:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 68 \\ t_1 \cdot t_2 = 256 \end{cases}$$

$$t_1 = 64; t_2 = 4$$

Зробимо зворотню заміну:

$$x = \pm 8 \text{ або } x = \pm 2$$

Підставивши отримані корені з рівність $y = \frac{16}{x}$, отримаємо розв'язки системи: (2; 8), (8; 2), (-2; -8), (-8; -2).

Нам потрібно було знайти два числа, які задовольняють умови задачі. Таких пар дві: 8 і 2, та -8 і -2.

Відповідь: 8 і 2; -8 і -2.

Задача 2:

Два мотоциклісти одночасно вирушили назустріч один одному з пунктів А і В, відстань між якими 200 км. Вони зустрілись через 2 години. Знайти, чому дорівнює швидкість кожного мотоцикліста, якщо відомо, що перший 120 км проїжджає на 1 годину швидше, ніж другий, а їхні швидкості не перевищують 80 км/год.

Проаналізуємо умову задачі:

Основні величини - швидкості двох мотоциклістів. Відомо, що мотоциклісти вирушили назустріч один одному і зустрілись через 2 години. В сумі вони за цей час подолали 200 км. Візьмемо швидкості мотоциклістів як невідомі x та y .

Складемо модель задачі у вигляді таблиці:

	Швидкість, км/год	Час до зустрічі, год	Відстань між пунктами, км	Час, витрачений на 120 км, год
Перший мотоцикліст	x	2	$2x$	$\frac{120}{x}$, на 1 год <, ніж
Другий мотоцикліст	y	2	$2y$	$\frac{120}{y}$

Запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 2y = 200 \\ \frac{120}{x} + 1 = \frac{120}{y} \end{cases}$$

Поділимо перше рівняння системи на 2.

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ \frac{120}{x} + 1 = \frac{120}{y} \end{cases}$$

Виразимо з першого рівняння системи x і підставимо отриману рівність в друге рівняння.

$$\begin{cases} x = 100 - y \\ \frac{120}{100 - y} + 1 = \frac{120}{y} \end{cases}$$

Розв'яжемо друге рівняння як дробово-раціональне рівняння. Перенесемо всі доданки вліво від знаку дорівнює.

$$\frac{120}{100 - y} + 1 - \frac{120}{y} = 0$$

Зведемо все до спільного знаменника, тоді:

$$\frac{120y + y(100 - y) - 120(100 - y)}{y(100 - y)} = 0$$

Прирівняємо чисельник до нуля, врахувавши, що y не може дорівнювати 0 та 100.

$$120y + 100y - y^2 - 12000 + 120y = 0$$

Зведемо подібні доданки:

$$-y^2 + 340y - 12000 = 0$$

Помноживши обидві частини рівняння на мінус 1, отримаємо квадратне рівняння:

$$y^2 - 340y + 12000 = 0$$

Розв'яжемо за теоремою, оберненою до теореми Вієта:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 340 \\ y_1 \cdot y_2 = 12000 \end{cases}$$

Отримали:

$$y_1 = 40; y_2 = 300$$

Так як за умовою швидкість не може перевищувати 80 км/год, тому 300 км/год не задовольняє умову задачі. Тоді:

$$y = 40 \frac{\text{км}}{\text{год}} - \text{швидкість другого мотоцикліста}$$

Знайдемо x , підставивши знайдений y в рівність $x = 100 - y$.

$$x = 100 - 40 = 60 \frac{\text{км}}{\text{год}} - \text{швидкість першого мотоцикліста}$$

Відповідь: 60 км/год та 40 км/год.