Квадратична функція, її графік і властивості

Функцію, яку можна задати формулою виду

$$\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c,} \qquad (1)$$

де x — незалежна змінна, a, b і c — деякі числа, причому $a \neq 0$, називають *квадратичною*.

Наприклад, $y = 5x^2 - 4x + 1$, $y = 2x^2 + x$, $y = -3x^2 - 6$, $y = -5x^2$— квадратичні функції.

Коефіцієнти b та c у формулі (1) квадратичної функції в окремих випадках можуть дорівнювати 0. Розглянемо ці випадки.

1. **При $b = c = 0$** функція (1) набуває вигляду $\boldsymbol{y = ax^2}$***, де*** $\boldsymbol{a \neq 0}$**.**

Розглянемо докладніше графіки функцій $y = 2x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$, $y = -2x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$.

Графік функції $y = 2x^2$ можна одержати з графіка функції $y = x^2$, розтягнувши останній від осі Оx у 2 рази, а графік функції $y = \frac{1}{2}x^2$, стиснувши графік функції $y = x^2$ до осі Оx у 2 рази.

Аналогічно можна побудувати графіки функцій$y = -2x^2$ і$y = -\frac{1}{2}x^2$ (рис. 1), тільки вітки параболи будуть напрямлені вниз.

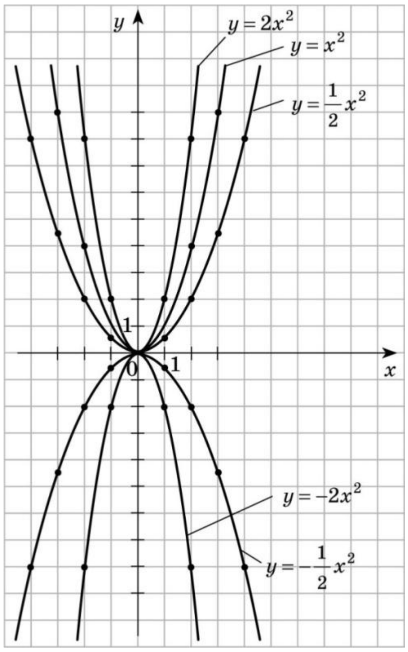


Рис. 1

Властивості функції $y = ax^2$, де $a \neq 0$

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2) Якщо $a > 0$, то $E(y) = [0; +\infty)$;
   якщо $a < 0$, то $E(y) = (-\infty; 0]$.

3) Графік функції — парабола.

4) Якщо $x = 0$, то $y = 0$. Графік проходить через точку $(0; 0)$.

Цю точку називають ***вершиною параболи***.

5) Якщо $a > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору,
   якщо $a < 0$ — вниз.

6) Якщо $a > 0$, то функція зростає на проміжку $[0; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-\infty; 0]$.
   Якщо $a < 0$, функція зростає на проміжку $(-\infty; 0]$ і спадає на проміжку $[0; +\infty)$.

7) Графік функції симетричний відносно осі O*y*.

2. **При $b = 0, c \neq 0$** функція (1) набуває вигляду $\boldsymbol{y = ax^2 + c}$, де $a \neq 0$, $c \neq 0$.

У цьому випадку графік функції можна отримати, здійснивши паралельне перенесення графіка функції $\boldsymbol{y = ax^2}$ на *c* одиниць угору (якщо $c > 0$) або на $|c|$ одиниць униз (якщо $c < 0$).

Властивості функції $y = ax^2 + c$, де $a \neq 0$, $c \neq 0$.

1) $D(y) = (-\infty; +\infty)$.

2) Якщо $a > 0$, то $E(y) = [c; +\infty)$,
   якщо $a < 0$, то $E(y) = (-\infty; c]$.

3) Графік функції — парабола.

4) Якщо $x = 0$, то $\boldsymbol{y = c}$. Точка $(0; c)$ — ***вершина параболи***.

5) Якщо $a > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору, якщо $a < 0$ — вниз.

6) Якщо $a > 0$, функція зростає на проміжку$[0; +\infty)$ і спадає на проміжку $(-\infty; 0]$.

Якщо $a < 0$, функція зростає на проміжку $(-\infty; 0]$ і спадає на проміжку $[0; +\infty)$.

7) Графік функції симетричний відносно осі Оy.

3. $\boldsymbol{b \neq 0,\ c \neq 0}$.

Графік квадратичної функції $\boldsymbol{y = ax^2 + bx + c}$у цьому випадку **збігається з графіком функції** $\boldsymbol{y = ax^2}$**,** але дещо зміщений на координатній площині (уздовж обох осей). З’ясувати, як саме потрібно перемістити параболу $\boldsymbol{y = ax^2}$**,** можна, ***виділивши повний квадрат*** з квадратного тричлена $\boldsymbol{ax^2 + bx + c}$**.** Маємо:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2x \cdot \frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) =$$

$$= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Позначимо

$$x_0 = -\frac{b}{2a},\quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Тоді формулу

$$y = ax^2 + bx + c$$

можна подати у вигляді

$$y = a\,(x - x_0)^2 + y_0.$$

Схема побудови шуканого графіка є такою:

$$y = ax^2 \xrightarrow{\substack{\text{управо} \\ \text{або вліво} \\ \text{на } |x_0| \text{ од.}}} y = a\,(x - x_0)^2 \xrightarrow{\substack{\text{угору} \\ \text{або вниз} \\ \text{на } |y_0| \text{ од.}}} y = a\,(x - x_0)^2 + y_0$$

На рисунку 2 показано побудову для випадку, коли $a > 0,\ x_0 > 0,\ y_0 > 0$. На рисунку 3 показано побудову для випадку, коли$a < 0,\ x_0 < 0, y_0 > 0$.

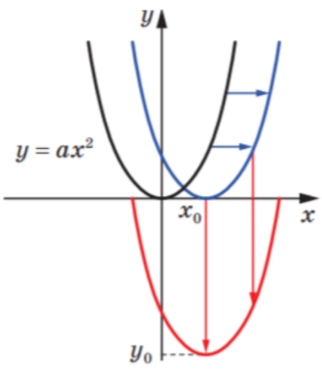


Рис. 2

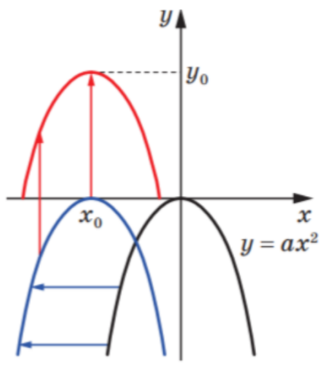


Рис. 3

Тепер можна зробити такий висновок:
графіком квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ є парабола, яка дорівнює параболі $y = ax^2$ з вершиною в точці $(x_0; y_0) = (x_В;\ y_В)$, де

$$x_В = -\frac{b}{2a},\quad y_В = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Вітки параболи $y = ax^2 + bx + c$ напрямлені так само, як і вітки параболи $y = ax^2$:
− якщо $a > 0$, то вітки параболи напрямлені вгору,
− якщо $a < 0$, то вітки параболи напрямлені вниз.
Віссю симетрії параболи є пряма

$$x = x_В.$$

Приклад 1.

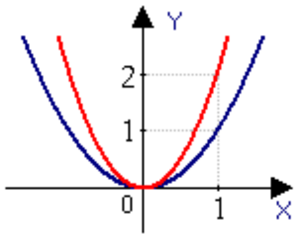
Побудувати графік функції $y = 2x^2 - 12x + 19$.

Розв'язання:

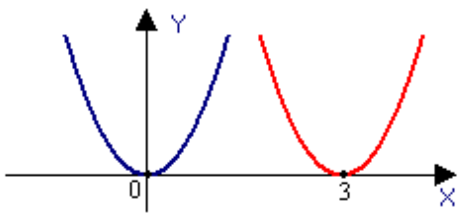
Виділимо повний квадрат з квадратного тричлена, який задає функцію:
$2x^2 - 12x + 19 = 2x^2 - 12x + 18 + 1 = 2(x^2 - 6x + 9) + 1 = 2(x-3)^2 + 1.$

Отже, $y = 2x^2 - 12x + 19 = 2(x-3)^2 + 1.$

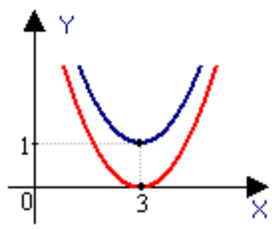
Побудуємо графік шляхом геометричних перетворень:



Крок 1. Розтяг синьої параболи y = x^2вдвічі вздовж осі Оу



Крок 2. Паралельне перенесення графіка функції y = $2x^2$ вздовж осі Оx вправо на 3 одиниці



Крок 3. Паралельне перенесення графікаy = $2(x-3)^2$ вздовж осі Оy вгору на 1 одиницю

Приклад 2.

Побудувати графік функції $y = -\frac{x^2}{2} - 2x - 3.$

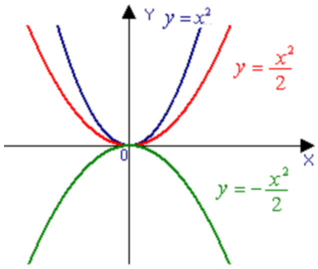
Розв'язання:

Виділимо повний квадрат з квадратного тричлена, який задаєфункцію:

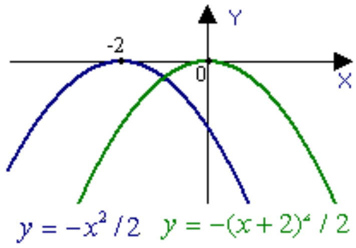
$$-\frac{x^2}{2} - 2x - 3 = \left(-\frac{x^2}{2} - 2x - 2\right) - 1 = -\frac{1}{2}(x^2 + 4x + 4) - 1 = -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 1.$$

Отже, $y = -\frac{x^2}{2} - 2x - 3 = -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 1.$

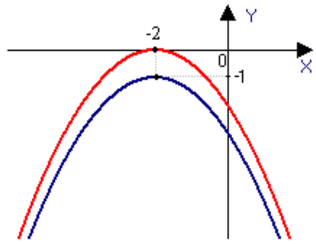
Побудуємо графік шляхом геометричних перетворень



Крок 1. Стиск синьої параболи y = x^2 вдвічі вздовж осі Oy і з подальшою симетрією відносно осі Ox



Крок 2. Паралельне перенесення графіка функції y = $-\frac{x^2}{2}$ вздовж осі Ox вліво на 3 одиниці



Крок 3. Паралельне перенесення графіка функціїy = $-\frac{1}{2}(x+3)^2$ вздовж осі Oy вниз на 1 одиницю

Завдання для самотренування

Побудуйте графіки функцій:

1. $y = -x^2 - 5$;
2. $y = x^2 - 4x - 5$;
3. $y = -x^2 + 2x + 3$

Запишіть координати вершини параболи.