

## Квадратна нерівність. Розв'язування квадратних нерівностей

**Означення.** Нерівності виду  $ax^2+bx+c>0$  ( $ax^2+bx+c<0$ ,  $ax^2+bx+c\geq 0$ ,  $ax^2+bx+c\leq 0$ ), де  $x$  — змінна,  $a, b, c$  — деякі числа, причому  $a\neq 0$ , називають **квадратними нерівностями**.

Квадратні нерівності можуть бути *строгими* (знаки «>» або «<») і *нестрогими* (знаки « $\geq$ » або « $\leq$ »).

Наприклад,  $2x^2 - 3x + 1 > 0$ ,  $3x^2 - 5 < 0$ ,  $-x^2 + 9 \leq 0$  – квадратні нерівності.

Розв'язування квадратних нерівностей можна звести до знаходження проміжків, на яких квадратична функція  $y = ax^2 + bx + c$  набуває додатних, недодатних, від'ємних або невід'ємних значень. Такий метод розв'язування нерівностей  $f(x) \geq 0$ ,  $f(x) \leq 0$ ,  $f(x) < 0$ ,  $f(x) > 0$  за допомогою графіка функції називають **графічним**.

Знак нерівності	Зображення точок	Дужки
$\leq$ $\geq$		[ ; ]
$<$ $>$		( ; )

### Приклад 1.

Які з чисел  $-2$ ;  $0$ ;  $1$  є розв'язками нерівності  $x^2 - x - 2 < 0$ ?

*Розв'язання.*

Число  $-2$ ;  $0$ ;  $1$  буде розв'язком нерівності, якщо при підстановці у вираз, який задає нерівність, перетворює цю нерівність у правильну числову.

Перевіримо цей факт для числа  $-2$ . Маємо  $(-2)^2 - (-2) - 2 = 4$ .

$4 < 0$  – нерівність хибна  $\Rightarrow -2$  не є розв'язком нерівності  $x^2 - x - 2 < 0$ .

Для числа  $0$  маємо  $0^2 - 0 - 2 = -2$ .

$-2 < 0$  – нерівність правильна  $\Rightarrow 0$  є розв'язком нерівності  $x^2 - x - 2 < 0$ .

Для числа  $1$  маємо  $1^2 - 1 - 2 = -2$ .

$-2 < 0$  – нерівність правильна  $\Rightarrow 1$  є розв'язком нерівності  $x^2 - x - 2 < 0$ .

### Приклад 2.

На рисунку зображено графік функції  $y = x^2 + 4x - 5$ .

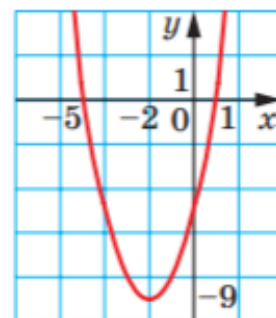
Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1)  $x^2 + 4x - 5 < 0$ ;

3)  $x^2 + 4x - 5 > 0$ ;

2)  $x^2 + 4x - 5 \leq 0$ ;

4)  $x^2 + 4x - 5 \geq 0$ .



*Розв'язання.*

Використовуючи графік функції  $y = x^2 + 4x - 5$  з'ясуємо, де функція набуває

1) від'ємних значень, тобто  $f(x) < 0 \Rightarrow (-5; 1)$ ;

2) недодатних значень, тобто  $f(x) \leq 0 \Rightarrow [-5; 1]$ ;

3) додатних значень, тобто  $f(x) > 0 \Rightarrow (-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$ ;

4) невід'ємних значень, тобто  $f(x) \geq 0 \Rightarrow (-\infty; -5] \cup [1; +\infty)$ .

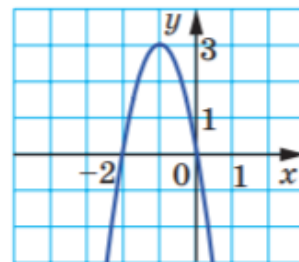
### Приклад 3.

На рисунку зображено графік функції  $y = -3x^2 - 6x$ .

Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1)  $-3x^2 - 6x < 0$ ;                      3)  $-3x^2 - 6x > 0$ ;

2)  $-3x^2 - 6x \leq 0$ ;                      4)  $-3x^2 - 6x \geq 0$ .



*Розв'язання.*

Використовуючи графік функції  $y = -3x^2 - 6x$  з'ясуємо, де функція набуває

1) від'ємних значень, тобто  $f(x) < 0 \Rightarrow (-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ ;

2) недодатних значень, тобто  $f(x) \leq 0 \Rightarrow (-\infty; -2] \cup [0; +\infty)$ ;

3) додатних значень, тобто  $f(x) > 0 \Rightarrow (-2; 0)$ ;

4) невід'ємних значень, тобто  $f(x) \geq 0 \Rightarrow [-2; 0]$ .

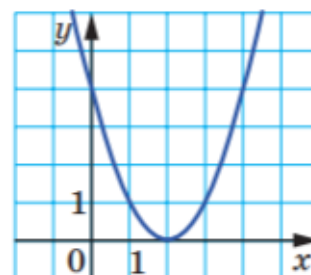
### Приклад 4.

На рисунку зображено графік функції  $y = x^2 + 4x + 4$ .

Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1)  $x^2 + 4x + 4 < 0$ ;                      3)  $x^2 + 4x + 4 > 0$ ;

2)  $x^2 + 4x + 4 \leq 0$ ;                      4)  $x^2 + 4x + 4 \geq 0$ .



*Розв'язання.*

Використовуючи графік функції  $y = x^2 + 4x + 4$  з'ясуємо, де функція набуває

1) від'ємних значень, тобто  $f(x) < 0 \Rightarrow \emptyset$ ;

2) недодатних значень, тобто  $f(x) \leq 0 \Rightarrow \emptyset$ ;

3) додатних значень, тобто  $f(x) > 0 \Rightarrow (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$ ;

4) невід'ємних значень, тобто  $f(x) \geq 0 \Rightarrow (-\infty; +\infty)$ .

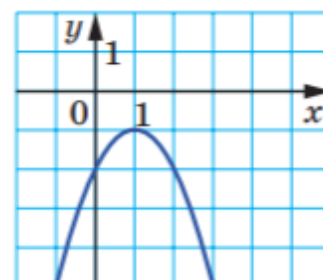
### Приклад 5.

На рисунку зображено графік функції  $y = -x^2 + 2x - 2$ .

Знайдіть множину розв'язків нерівності:

1)  $-x^2 + 2x - 2 < 0$ ;                      3)  $-x^2 + 2x - 2 > 0$ ;

2)  $-x^2 + 2x - 2 \leq 0$ ;                      4)  $-x^2 + 2x - 2 \geq 0$ .



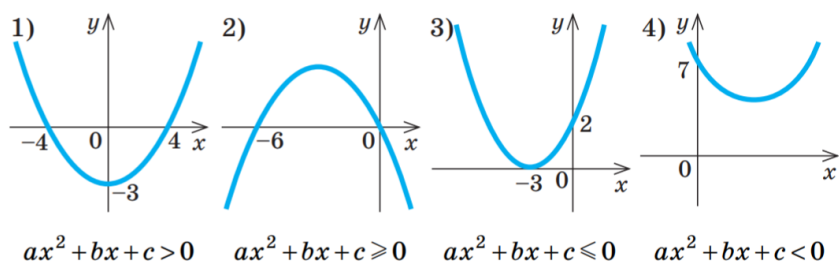
*Розв'язання.*

Використовуючи графік функції  $y = -x^2 + 2x - 2$  з'ясуємо, де функція набуває

- 1) від'ємних значень, тобто  $f(x) < 0 \Rightarrow (-\infty; +\infty)$ ;
- 2) недодатних значень, тобто  $f(x) \leq 0 \Rightarrow (-\infty; +\infty)$ ;
- 3) додатних значень, тобто  $f(x) > 0 \Rightarrow \emptyset$ ;
- 4) невід'ємних значень, тобто  $f(x) \geq 0 \Rightarrow \emptyset$ .

### Вправи для самотренування

1. За рисунками, на яких зображено графіки квадратичних функцій  $y = ax^2 + bx + c$ , знайдіть значення  $x$ , що задовольняють задану умову.



2. Побудуйте графік та розв'яжіть за його допомогою нерівності:

- 1)  $x^2 - 4x \leq 0$ ;    2)  $9 - x^2 > 0$ ;    3)  $x^2 - 4x + 4 > 0$ ;    4)  $x^2 + 2x + 1 \leq 0$ ;    5)  $-x^2 - 3 < 0$ .