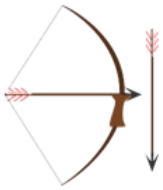
ТЕОРЕМА СИНУСІВ

Слово «синус» походить від індійського «*джива*» – тятива лука, хорда.



КОРИСНІ ФОРМУЛИ

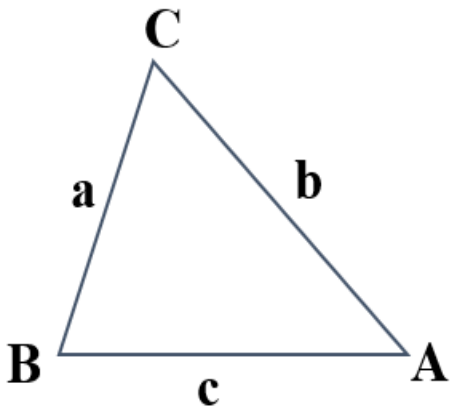
$$\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$$

На минулих уроках ми познайомилися з теоремою косинусів:
Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін трикутника мінус подвоєний добуток цих сторін і косинуса кута між ними.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

Ця теорема дозволяє розв'язувати два типи задач:

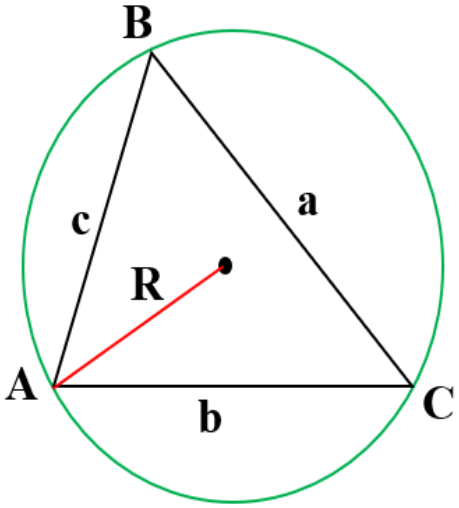
1) на знаходження невідомої сторони, коли відомі дві сторони трикутника та кут між ними;
2) на знаходження кутів трикутника, коли відомі всі його сторони.

Сторона і два прилеглі кути однозначно визначають трикутник. Отже, за вказаними елементами можна знайти дві інші невідомі сторони трикутника. Теорема косинусів у цьому випадку безсила. На допомогу приходить теорема синусів.

Відношення сторони трикутника до синуса протилежного кута дорівнює двом радіусам кола, описаного навколо трикутника:

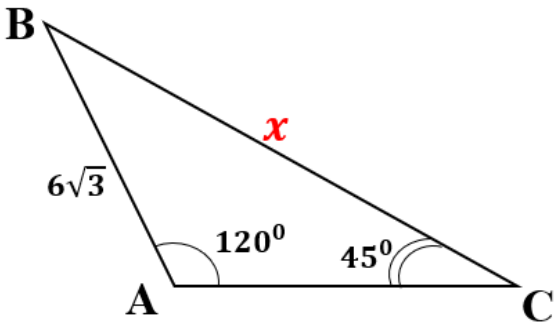
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

де a, b, c - сторони трикутника, протилежні кутам A, B, C відповідно, R – радіус описаного кола.



Розглянемо задачу

Два кути трикутника дорівнюють 120^0 і 45^0. Сторона, яка лежить проти меншого з них, дорівнює $6\sqrt{3}$ см. Знайти сторону трикутника, яка лежить проти більшого з даних кутів.



Розв'язання

Застосуємо теорему синусів. Оскільки сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів, ми можемо записати

$$\frac{BC}{\sin 120^0} = \frac{AB}{\sin 45^0}$$

Підставимо відомі значення:

$$\frac{BC}{\sin 120^0} = \frac{6\sqrt{3}}{\sin 45^0}$$

BC – невідомий крайній член пропорції. Щоб його знайти, потрібно добуток середніх членів пропорції поділити на відомий крайній член пропорції, тому

$$BC = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sin 120^0}{\sin 45^0}$$

$$\sin 120^0 = \sin(180^0 - 60^0) = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Підставимо значення синусів:

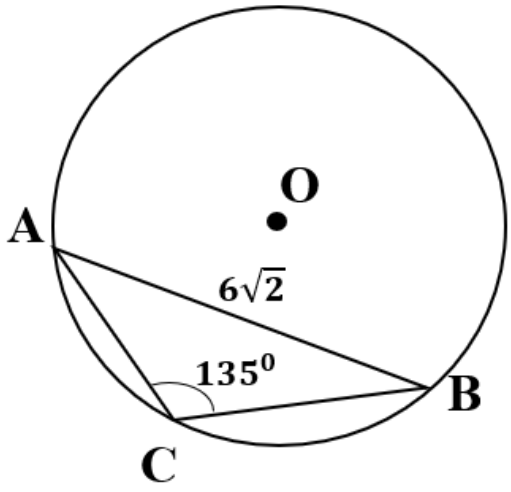
$$BC = \frac{6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$BC = \frac{6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot 3}{\sqrt{2}} = 9\sqrt{2}$$

Відповідь: $9\sqrt{2}$ см.

Теорема синусів не тільки дозволяє знаходити невідомі елементи трикутника, вона також допомагає знаходити радіус кола, описаного навколо цього трикутника.

У трикутнику ABC відомо, що $AB = 6\sqrt{2}$ см, $\angle C = 135^0$. Знайдіть діаметр кола, описаного навколо цього трикутника.



Розв'язання

Скористаємося теоремою синусів:

$$\frac{AB}{\sin \angle C} = 2R$$

$$\frac{AB}{\sin 135^0} = 2R$$

$$\sin 135^0 = \sin\ (180^0 - 45^0) = \sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Маємо:

$$\frac{6\sqrt{2}}{\sin 45^0} = 2R$$

$$6\sqrt{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 2R$$

Оскільки

$$D = 2R$$

$$D = 6\sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 12$$

Відповідь: 12 см.