

Многогранник та його елементи. Опуклі многогранники

1. **Многогранником** називають тіло, поверхня якого складається зі скінченної кількості многокутників.
2. Многокутники, які обмежують многогранник, називають **гранями**, сторони граней — **ребрами**, а їхні кінці — **вершинами многогранника**.
3. Відрізок, який сполучає дві вершини, що не належать одній грані, — **діагональ многогранника**.
4. Найменше число граней многогранника — чотири.

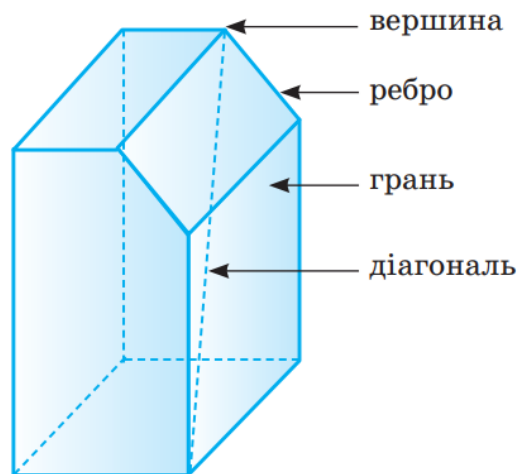


Рис. 1. Елементи многогранника

5. Многогранник називають опуклим, якщо він розташований з одного боку від площини кожної його грані. В інших випадках многогранник називають неопуклим.
6. **Теорема Ейлера.** Нехай V — число вершин опуклого многогранника, P — кількість його ребер, а Γ — відповідно, граней. Тоді правильна рівність $V - P + \Gamma = 2$.

Задача

Чи існує опуклий многогранник, кожна грань якого є шестикутником?

Розв'язання

Припустімо, що такий багатогранник існує, і він має Γ граней. Тоді його грані мають у сумі 6Γ сторін. Але кожна з цих сторін буде ребром рівно для 2 граней, тому всього буде 3Γ ребер:

$$P = 3\Gamma.$$

Тоді за теоремою Ейлера можна знайти кількість вершин:

$$V + \Gamma - P = 2$$

$$V + \Gamma - 3\Gamma = 2$$

$$V = 2 + 2\Gamma$$

Тепер згадаймо, що в кожній вершині сходяться не менше трьох ребер. Отже, якщо ми порахуємо всі ребра, що виходять із кожного ребра, то отримаємо величину, не меншу за $3V$. Але, оскільки кожне ребро проходить через 2 вершини, ми підраховали ребра двічі. Тобто кількість ребер буде не менше $3/2V$, або $1,5V$:

$$P \geq 1,5V$$

$$P \geq 1,5 \cdot (2 + 2\Gamma)$$

$$P \geq 3 + 3\Gamma$$

Ця нерівність суперечить отриманій раніше рівності $P = 3\Gamma$. Протиріччя показує, що насправді не може існувати опуклий многогранник, кожна грань якого — шестикутник.



Практичні завдання

Завдання 1

Побудуйте многогранник, який має 5 граней і 5 вершин. Скільки ребер він має? (Відповідь: 8 ребер).

Завдання 2

Побудуйте многогранник, який має 5 граней і 6 вершин. Скільки ребер він має? (Відповідь: 9 ребер).

Завдання 3



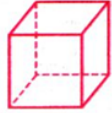







Опуклий многогранник має 8 граней, із них 4 — це чотирикутники, а ще 4 — п'ятикутники. Скільки у нього ребер та вершин? (Відповідь: 12 вершин та 18 ребер).



Рекомендовані джерела

1. Роганін О. М. Геометрія в таблицях і схемах. [7-11 класи] : [посібник] / [О. М. Роганін]. Харків : Торсінг : Навчальна література, 2019. 96 с. : схеми, табл.
2. Гальперіна А. Р. Інтерактивний довідник. Алгебра. Геометрія. 7-11 класи : схеми, табл., визначення, приклади, тести онлайн / Альбіна Гальперіна. Харків : Весна, 2019. 96, [1] с. : рис., табл.

Додаток

ПРАВИЛЬНІ МНОГОГРАННИКИ					
№	Тип правильного многогранника	Форма грані	Кількість граней	Кількість вершин	Кількість ребер
1	Тетраєдр (чотиригранник) 		4	4	6
2	Гексаєдр (шестигранник), або куб 		6	8	12
3	Октаєдр (восьмигранник) 		8	6	12
4	Ікосаєдр (двадцятигранник) 		20	12	30
5	Додекаєдр (дванадцятигранник) 		12	20	30