Синус, косинус, тангенс кутів від 0°до 180°

Нагадаємо, що в прямокутному трикутнику з катетами a і b, гіпотенузою c та гострим кутом α (рис. 1) за раніше даним означенням:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c},\quad \cos\alpha = \frac{b}{c},\quad \mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b},\quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}.$$

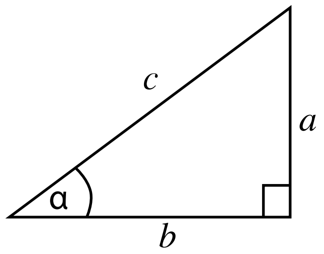

Рис. 1. До означення тригонометричних функцій гострого кута прямокутного трикутника

Дамо означення тригонометричних функцій для будь-якого кута від 0°до 180°. Для цього в прямокутній системі координат, з якою ви добре знайомі, побудуємо коло радіуса 1 з центром у початку координат (рис. 2). Таке коло називають тригонометричним. Від додатної півосі осі Ox відкладемо у напрямі проти ходу годинникової стрілки гострий кут α. Нехай M(x; y) — точка, у якій сторона цього кута перетинає дане коло (рис. 2, a). Проведемо перпендикуляр MN до осі Ox. Утворився прямокутний трикутник OMN з гострим кутом α, гіпотенузою OM = 1 і катетами, довжини яких дорівнюють координатам точки M: ON = x, MN = y. Із трикутника OMN маємо:

$$\sin\alpha = \frac{MN}{OM} = \frac{y}{1} = y,\quad \cos\alpha = \frac{ON}{OM} = \frac{x}{1} = x,$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{MN}{ON} = \frac{y}{x},\quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{ON}{MN} = \frac{x}{y}.$$

Рис. 2. До означення тригонометричних функцій

Отже, в тригонометричному колі синус і косинус гострого кута дорівнюють, відповідно, ординаті й абсцисі точки, у якій сторона цього кута перетинає коло, а тангенс і котангенс цього кута дорівнюють відношенням ординати до абсциси й абсциси до ординати, відповідно:

$$\sin\alpha = y,\ \cos\alpha = x,\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}.$$

Визначмо значення тригонометричних функцій кутів 0°, 90°, 180° (рис. 3). Якщо $\alpha = 0^\circ$, то точка M1 має координати (1; 0). Звідси $\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$. Оскільки ділення на нуль не визначене, то $\operatorname{ctg} 0^\circ$ не існує.

Якщо $\alpha = 90^\circ$, то точка M_2 має координати (0; 1). Звідси $\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\operatorname{ctg} 90^\circ = 0$. Оскільки ділення на нуль не визначене, то $\operatorname{tg} 90^\circ$ не існує.

І, нарешті, якщо $\alpha = 180^\circ$, то точка M_3 має координати (–1; 0). Звідси $\sin 180^\circ = 0$, $\cos 180^\circ = -1$, $\operatorname{tg} 180^\circ = 0$. Оскільки ділення на нуль не визначене, то $\operatorname{ctg} 180^\circ$ не існує.

Зауважимо також, що абсциси точок M для кутів від 0° до 180° змінюються в межах від –1 до 1, тобто $-1 \le \cos\alpha \le 1$, а ординати — в межах від 0 до 1, тобто $0 \le \sin\alpha \le 1$.

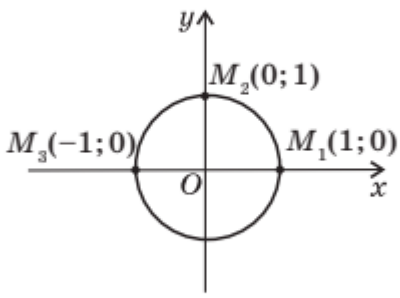

Рис. 3. Для означення кутів 0°, 90°, 180°

Під час розв’язування задач часто виникає необхідність обчислити невідому сторону трикутника за двома відомими сторонами й кутом між ними. Теорема Піфагора дає змогу зробити це у випадку, коли даний кут прямий. Наступна теорема є узагальненням теореми Піфагора і дозволяє знаходити невідому сторону в довільному трикутнику.

Теорема косинусів.

Квадрат будь-якої сторони трикутника (рис. 4) дорівнює сумі квадратів двох інших сторін без подвоєного добутку цих сторін на косинус кута між ними:

$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\angle\gamma$,

де a, b, c — сторони трикутника, кут γ — кут між сторонами a і b.

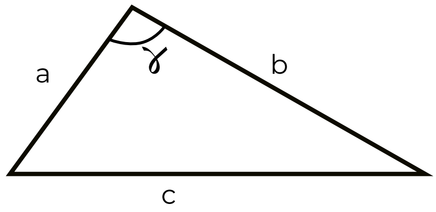

Рис. 4. До теореми косинусів

Практичні завдання

Задача 1

Знайдіть сторони паралелограма, якщо його діагоналі завдовжки 10 см і 16 см перетинаються під кутом 60°.

Розв’язання.
Нехай діагоналі паралелограма ABCD перетинаються в точці O, AC = 16 см, BD = 10 см, ∠AOB = 60° (рис. 5).

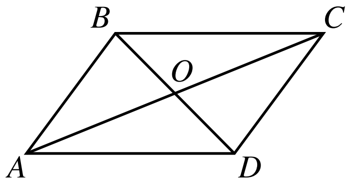

Рис. 5.

Оскільки діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл, то AO = OC = 8 см, BO = OD = 5 см. За теоремою косинусів із трикутника AOB маємо:

$AB^2 = OA^2+OB^2-2 \cdot AO \cdot OB \cdot \cos\angle AOB$,

$AB^2 = 8^2+5^2-2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos\angle 60^\circ = 7$см.

Оскільки ∠AOD = 120° як суміжний з кутом AOB, то з трикутника AOD за теоремою косинусів маємо:

$AD^2 = AO^2+OD^2-2 \cdot AO \cdot OD \cdot \cos\angle AOD$,

$AD^2 = 8^2+5^2-2 \cdot 8 \cdot 5 \cdot \cos\angle 120^\circ$.

Оскільки $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$, то $AD^2=129$, $AD = \sqrt{129}$ см.

Відповідь: 7 см і $\sqrt{129}$ см.

Задача 2

На стороні AC трикутника ABC позначено точку D так, що CD : AD = 1 : 2. Знайдіть відрізок BD, якщо AB = 14 см, BC = 13 см, AC = 15 см.

Розв'язання.

За теоремою косинусів з трикутника ABC (рис. 6) отримуємо:

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos\angle C$.

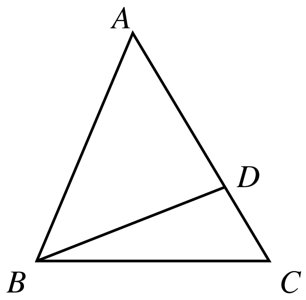

Рис. 6.

звідси $\cos\angle C = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2AC \cdot BC} = \dfrac{15^2 + 13^2 - 14^2}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \dfrac{225 + 169 - 196}{2 \cdot 15 \cdot 13} = \dfrac{33}{65}$.

Оскільки CD : AD = 1 : 2, то $CD = \dfrac{1}{3}AC = 5$ см.

Тоді з трикутника BCD отримуємо:

$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2 \cdot BC \cdot CD \cdot \cos\angle C = 13^2 + 5^2 - 2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot \dfrac{33}{65} = 128$.

Отже, $BD = \sqrt{128} = 8\sqrt{2}$ см.

Відповідь: $8\sqrt{2}$ см.

Рекомендовані джерела

1. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / [А.П.Єршова, В.В.Голобородько, О.Ф.Крижановський, С.В.Єршов]. Харків : Вид-во «Ранок», 2017. — 256 с. : іл.
2. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Х. : Гімназія, 2017. — 240 с. : іл.