Рівняння кола та прямої

Координати (x; y) кожної точки **параболи**, зображеної на рисунку 1, є розв'язком рівняння $y = x^2$. І навпаки, кожний розв'язок рівняння з двома змінними $y = x^2$ є координатами точки, яка лежить на цій параболі. У такому разі говорять, що рівняння параболи має вигляд $y = x^2$.

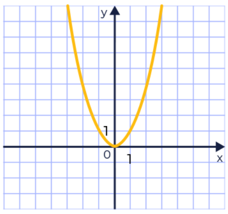


Рис 1. Графік параболи

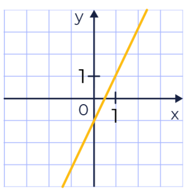
Рівнянням фігури *F*, заданої на площині *xy*, називають рівнянням із двома змінними *x* і *y*, яке має такі властивості:

1) якщо точка належить фігурі *F*, то її координати є розв'язком даного рівняння;

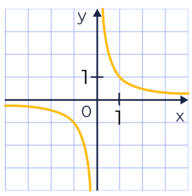
2) будь-який розв'язок (*x*; *y*) даного рівняння є координатами точки, яка належить фігурі *F*.

Наприклад, рівняння прямої, зображеної на рисунку 2(а), має вигляд $y = 2x - 1$, а рівняння гіперболи, зображеної на рисунку 2(б), має вигляд $y = \frac{1}{x}$.

Заведено говорити, що, наприклад, рівняння $y = 2x - 1$ та $y = \frac{1}{x}$ задають **пряму** й **гіперболу,** відповідно.



а



б

Рис. 2. Графік прямої (а) та графік гіперболи (б)

Нехай $M(x; y)$ — довільна точка даного кола (рис. 3), виведімо рівняння кола радіуса R із центром у точці $A(a; b)$:

$$\boxed{(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.}$$

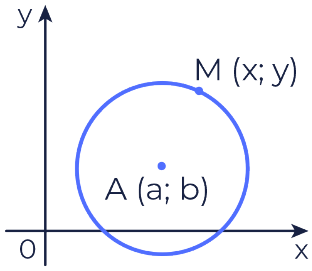


Рис. 3. Коло з центром A $(a; b)$

Якщо центром кола є початок координат (рис. 4), то $a = b = 0$. У такому разі рівняння кола має вигляд:

$$\boxed{x^2 + y^2 = R^2.}$$

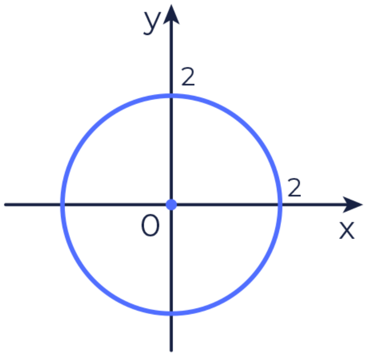


Рис 4. Рівняння кола з центром у початку координат

Рівняння прямої має вигляд:

$\boxed{ax + by = c,}$ де a, b і c — деякі числа, причому a і b не дорівнюють нулю одночасно.

Якщо $a = b = c = 0$, то графіком рівняння $ax + by = c$ є вся площина xy. Якщо $a = b = 0$ і $c \neq 0$, то рівняння не має розв’язків.

Виділімо три окремі випадки розміщення прямої в прямокутній системі координат:

1) $a = 0$, $b \neq 0$. У цьому випадку рівняння прямої набуває вигляду $by + c = 0$, або $y = y_0$, де $y_0 = -\frac{c}{b}$ — деяке число. Пряма $y = y_0$ **паралельна осі абсцис** (рис. 5) або збігається з нею (рівняння осі абсцис має вигляд $y = 0$);

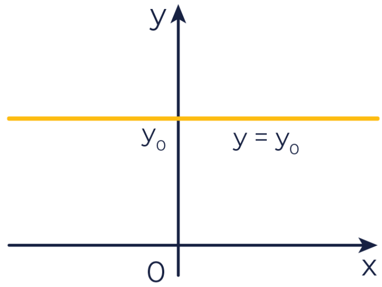


Рис. 5. Пряма паралельна осі абсцис

2) $a \neq 0$, $b = 0$. У цьому випадку рівняння прямої набуває вигляду $ax + c = 0$, або $x = x_0$, де $x_0 = -\frac{c}{a}$ — деяке число. Пряма $x = x_0$ **паралельна осі ординат** (рис. 6) або збігається з нею (рівняння осі ординат має вигляд $x = 0$);

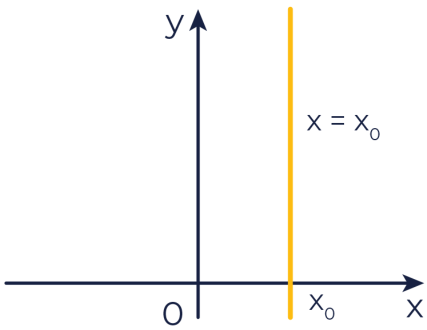


Рис. 6. Пряма паралельна осі ординат

3) $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c = 0$. У цьому випадку рівняння прямої набуває вигляду $ax + by = 0$, або $y = kx$, де $k = -\frac{a}{b}$ — деяке число. Пряма $y = kx$ **проходить через початок координат** (рис. 7).

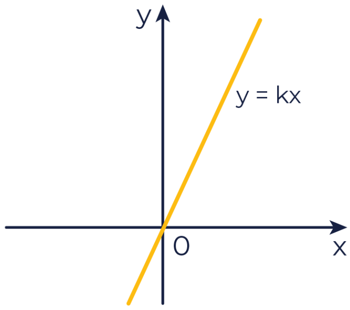


Рис. 7. Пряма проходить через початок координат

Зазначмо також, що для прямих, не паралельних осі ординат, рівняння $ax + by + c = 0$ можна подати як $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, або $y = kx + m$, де k і m — деякі числа (**рівняння невертикальної прямої**) (рис. 8). Саме такий вигляд рівняння прямої зручно використовувати для розв'язування деяких, зокрема алгебраїчних, задач.

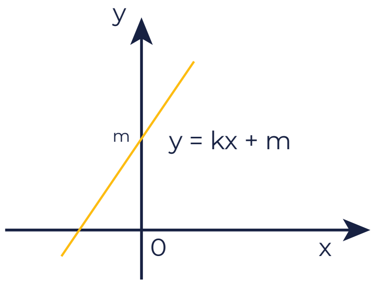


Рис. 8. Невертикальна пряма

Практичні завдання

Задача 1

Складіть рівняння кола, діаметром якого є відрізок AB, якщо A (–4; 10), B (8; –2).

Розв'язання

Оскільки центр кола є серединою діаметра, то можемо знайти координати (a; b) центра C кола:

$$a = \frac{-4 + 8}{2} = 2; \ b = \frac{10 - 2}{2} = 4.$$

Отже, C(2; 4).

Радіус кола R дорівнює відрізку AC. Тоді $R^2 = (2 + 4)^2 + (4 - 10)^2 = 36 + 36 = 72$.

Тож шукане рівняння має вигляд:

$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 72$.

Відповідь: $(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 72$.

Задача 2

Доведіть, що рівняння $x^2 + y^2 + 4x - 12y + 31 = 0$ задає коло. Знайдіть координати центра та радіус цього кола.

Розв'язання

Подаємо дане рівняння як $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$, тоді:

$$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 12y + 36 - 9 = 0$$

$$(x + 2)^2 + (y - 6)^2 = 9$$

Отже, дане рівняння є рівнянням кола із центром у точці (–2; 6) і радіусом 3.

Відповідь: (–2; 6), 3.

Задача 3

Складіть рівняння прямої, яка проходить через точки C (6; 1) і D (–18; –7).

Розв’язання

Оскільки дані точки мають різні абсциси, то пряма *CD* не є вертикальною. Тоді можна скористатися рівнянням прямої $y = kx + p$. Підставивши координати точок *C* і *D* у рівняння $y = kx + p$, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 6k + p = 1, \\ -18k + p = -7. \end{cases}$$

Розв’язавши цю систему рівнянь, знаходимо, що $k = \frac{1}{3}$, $p = -1$.

Відповідь: $y = \frac{1}{3}x - 1$.

Рекомендовані джерела

1. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. / [А.П.Єршова, В.В.Голобородько, О.Ф.Крижановський, С.В.Єршов]. Харків : Вид-во «Ранок», 2017. 256 с. : іл.
2. Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. Х. : Гімназія, 2017. 240 с. : іл.