Чотирикутник та його властивості. Сума кутів чотирикутника

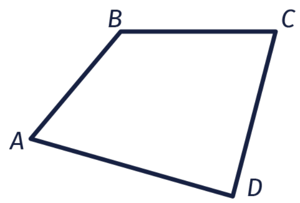
Чотирикутником називають фігура, яка складається з чотирьох точок, жодні три з яких не лежать на одній прямій, та чотирьох відрізків, які послідовно сполучають ці точки та не перетинаються.

На рисунку чотирикутник ***ABCD***. Також його можна назвати ***BCDA,*** або ***CDAB,*** або ***DABC.***

Елементи чотирикутника

Вершини:A; B; C; D.

Сторони: AB; BC; CD; DA.



Кути: ***∠A (∠BAD*** *або* ***∠DAB);***

∠B (∠ABC *або* ***∠CBA);***

∠C (∠BCD *або* ***∠DCB);***

∠D (∠ADC *або* ***∠CDA)***.

Дві вершини, два кути, дві сторони чотирикутника можуть бути або ***сусідні-ми*** або ***протилежними***.

Дві вершини ***є сусідніми***, якщо вони є кінцями однієї сторони чотирикутника. Наприклад, для вершини ***B*** чотирикутника ***ABCD*** сусідніми вершинами є ***A*** та ***C***. Сторони чотирикутника, які мають спільну вершину, є сусідніми сторонами, наприклад, ***AB*** і ***BC*** (вершина ***B —*** їхня спільна вершина).

Вершини, які не є сусідніми, називають *протилежними*. Приміром, вершини ***A*** і ***C*** — протилежні. Сторони чотирикутника, які не мають спільних вершин, називають *протилежними сторонами*. Вершина ***D*** протилежна вершині ***B***. Кути ***A*** та ***C*** є протилежними.

Діагоналлю чотирикутника називають відрізок, що сполучає дві протилежні вершини. Кожний чотирикутник має дві діагоналі.

Периметром чотирикутника називають суму довжин усіх його сторін.

$\boldsymbol{P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA}$ — формула для знаходження периметра чотирикутника ***ABCD.***

Корисно пам'ятати

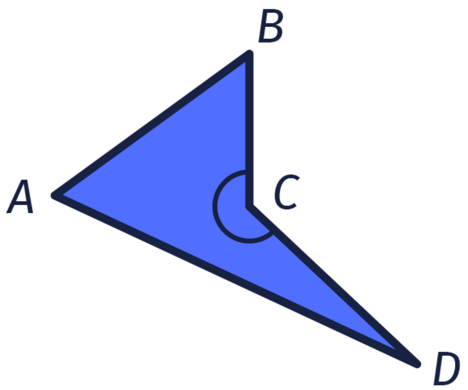
Чотирикутник без внутрішньої області — фігура не жорстка: чотири сторони не задають однозначно чотирикутник.
Для забезпечення жорсткості у чотирикутнику з'єднують його протилежні вершини. Трикутники є жорсткі фігури: їхню форму мають елементи майже кожної будівельної конструкції. Жорстка фігура не підлягає деформації.

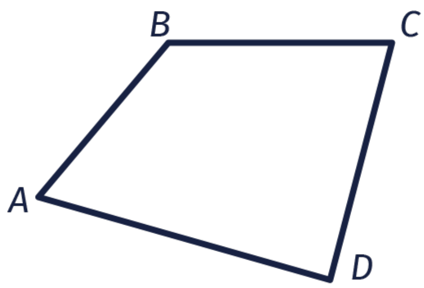
Чотирикутники бувають опуклими й неопуклими
Один з кутів чотирикутника може бути більшим від розгорнутого**.**

Наприклад,

у чотирикутнику ABCD: $\angle C > 180^\circ$.
Такий чотирикутник ***неопуклий.***

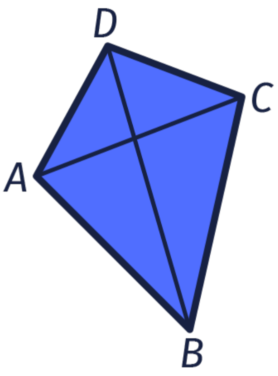
Якщо кожний з кутів чотирикутника менший від розгорнутого, його називають ***опуклим чотирикутником.***

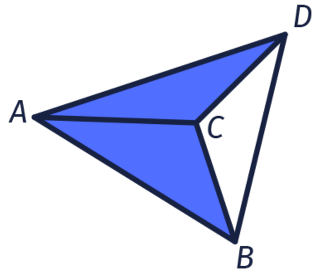




Зауважте!

У випадку плоского чотирикутника ми розглядаємо саму фігуру, а також частину площини, обмеженої її контуром. На рисунку — діагоналі плоского опуклого чотирикутника ***ABCD AC*** та ***BD*** перетинаються у точці ***O***.
У плоскому неопуклому чотирикутнику ***ABCD*** діагоналі ***AC*** та ***BD*** не перетинаються, оскільки одна з них ***(AC)*** належить внутрішній області чотирикутника, друга ***(BD)*** лежить зовні чотирикутника.

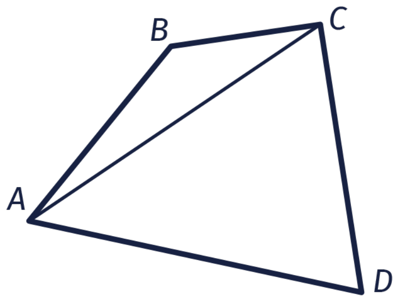




Якщо обидві діагоналі чотирикутника належать чотирикутнику, то такий чотирикутник ***називають опуклим***. Якщо діагоналі чотирикутника не перетинаються, то такий чотирикутник ***неопуклий***.

Властивості чотирикутників
Довжина будь-якої сторони опуклого чотирикутника менша за суму довжин трьох його інших сторін.

$a < b + c + d$ — a, b, c, d — сторони чотирикутника.



Для чотирикутника ABCD:
AD < AB + BC + CD
AD < AC + CD < AB + BC + CD,
AB < BC + CD + AD,
BC < CD + AD + AB,
CD < AD + AB + BC.

Приклад
Чи може чотирикутник мати сторони: ***15 см, 6 см, 5 см та 7 см?***
Розв’язання
Нехай у чотирикутнику ***ABCD: AD = 15 м, AB = 6 см, BC = 5 см, CD = 7 см.***
Перевірмо, чи
AD < AB + BC + CD;
тоді справджуватиметься:
15 < 6 + 5 + 7,
15 < 18.
Отже, чотирикутник може мати сторони 15 см, 6 см, 5 см та 7 см.

Теорема про суму кутів чотирикутника
Сума кутів опуклого чотирикутника дорівнює 360°.

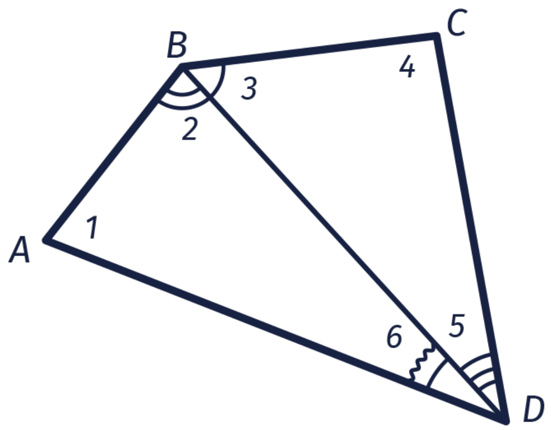
Дано: ABCD — чотирикутник.
Довести: ***∠A + ∠B + ∠C + ∠D = 360°.***

Доведення

Позначимо для зручності:

$\angle A = \angle 1$, $\angle ABD = \angle 2$, $\angle CBD = \angle 3$,

$\angle C = \angle 4$, $\angle CDB = \angle 5$, $\angle BDA = \angle 6$.



За теоремою про суму кутів трикутника

для **ΔABD**: **$\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 = 180°$,**

для **ΔBCD**: **$\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 180°$.**

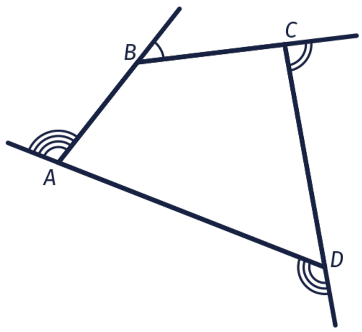
Додамо праві та ліві частини рівностей:

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 360°$, тоді **$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 360°$.**

Отже: **$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$.** .

Зовнішнім кутом чотирикутника називають кут, суміжний з кутом чотирикутника.

Сума зовнішніх кутів чотирикутника, взятих по одному при кожній вершині, дорівнює 360°.



Практичні завдання

Завдання 1

Знайдіть невідомий кут чотирикутника, якщо його три кути дорівнюють: **120°; 80° ; 100°.**

Розв'язання

Нехай $ABCD$ — заданий чотирикутник, у якому $\angle A = 120°$, $\angle B = 80°$, $\angle C = 100°$. Знайдімо величину $\angle D$.

Оскільки:

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 360°$,

то: $\angle D = 360° - (\angle A + \angle B + \angle C) = 360° - (120° + 80° + 100°) = 60°$

Відповідь: 60°.

Завдання 2

Знайдіть кути чотирикутника, якщо вони пропорційні числам 2; 3; 3; 4.

Розв'язання

Нехай x — деяке число градусів, тоді шукані кути дорівнюють $2x$; $3x$; $3x$; $4x$. Сума всіх кутів чотирикутника дорівнює 360°, тому:

$2x + 3x + 3x + 4x = 360^\circ$,

$12x = 360^\circ$,

$x = 30^\circ$.

Тоді: $2 \cdot 30^\circ = 60^\circ$, $3 \cdot 30^\circ = 90^\circ$, $4 \cdot 30^\circ = 120^\circ$.
Отже, шукані кути чотирикутника — 60°, 90°, 90°, 120°.

Відповідь: 60°, 90°, 90°, 120°.

Рекомендовані джерела

1. Геометрія. 8 кл. : Підручник / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова, К. : Видавничий дім «Освіта», 2016. 272 с. :
2. Геометрія. 8 кл.: Підручник / М.Бурда., Н. Тарасенкова К:.«Оріон»:, 2021. 196 с.