

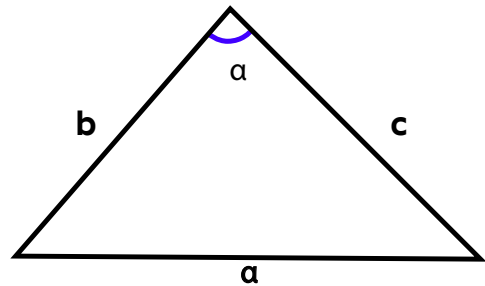
## Розв'язування трикутників

**Розв'язати трикутник** – означає знайти невідомі сторони і кути трикутника за відомими сторонами і кутами.

Теореми, які використовують при розв'язуванні трикутників.

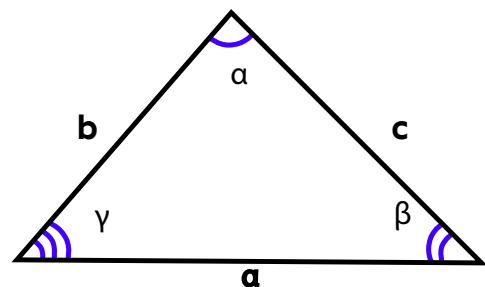
Теорема косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$



Теорема синусів

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

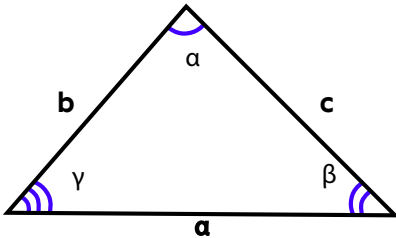


При розв'язуванні задач використовуються такі позначення:

$a$ ,  $b$  і  $c$  – сторони трикутника,  $\alpha$ ,  $\beta$  і  $\gamma$  – кути протилежні відповідно сторонам  $a$ ,  $b$  і  $c$ .

### Задача 1

У трикутнику дано:



$$a = 1 \text{ см}, b = \sqrt{2} \text{ см}, \angle \beta = 45^\circ$$

Знайти  $\angle \gamma$

За теоремою синусів  $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}$

$$\sin \alpha = \frac{a \cdot \sin \beta}{b} = \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Проте в умові задачі не вказано вид трикутника. Тому  $\alpha$  може бути як гострим, так і тупим кутом.

$$\alpha = 30^\circ \text{ або } \alpha = 150^\circ$$

При  $\alpha = 30^\circ$  за сумою кутів трикутника

$$\gamma = 180^\circ - (30^\circ + 45^\circ) = 105^\circ$$

При  $\alpha = 150^\circ$

$$\gamma = 180^\circ - (150^\circ + 45^\circ) = -15^\circ$$

Тоді задача має лише один розв'язок.

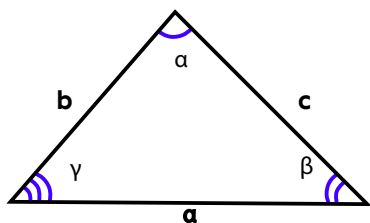
**Відповідь:**  $\angle \gamma = 105^\circ$ .

Зауважимо, що у деяких задачах не завжди можна знайти точне значення кута.

Тоді значення тригонометричних функцій можемо знаходити за допомогою калькулятора.

## Задача 2

Розв'яжіть трикутник за двома сторонами й кутом між ними, якщо



$$b = 7 \text{ см}, c = 6 \text{ см} \text{ і } \angle \alpha = 40^\circ$$

Розв'язання

За теоремою косинусів

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha = 49 + 36 - 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \cos 40^\circ \approx 20,652$$

$$a \approx 4,5 \text{ см}$$

Отже, для знаходження невідомих кутів можна застосувати як теорему косинусів, так і теорему синусів. Розглянемо обидва способи.

### 1. За теоремою косинусів

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$\cos \beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} \approx \frac{7,25}{54} \approx 0,134$$

$$\angle \beta \approx 82^\circ$$

$$\angle \gamma = 180^\circ - (40^\circ + 82^\circ) \approx 58^\circ \text{ за сумою кутів трикутника.}$$

### 2. За теоремою синусів

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$\sin \gamma = \frac{c \cdot \sin \alpha}{a} \approx 0,85$$

Оскільки сторона  $c$  не є найбільшою у даному трикутнику, тому кут  $\gamma$  – гострий.

$$\text{Отже, } \angle \gamma \approx 58^\circ$$

$$\text{Тоді за сумою кутів трикутника } \angle \beta = 180^\circ - (40^\circ + 58^\circ) = 82^\circ$$

**Відповідь:**  $c \approx 4,5 \text{ см}$ ,  $\angle \beta \approx 82^\circ$ ,  $\angle \gamma \approx 58^\circ$ .

## Завдання для самоконтролю

1. Розв'яжіть трикутник за стороною  $a = 10 \text{ см}$  і двома кутами  $\beta = 26^\circ$ ,  $\gamma = 62^\circ$ .
2. У трикутнику  $ABC$ ,  $AC = BC = 10 \text{ см}$ ,  $\angle C = 70^\circ$ . Знайдіть медіану  $BM$ .