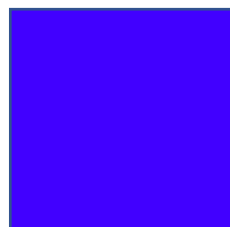
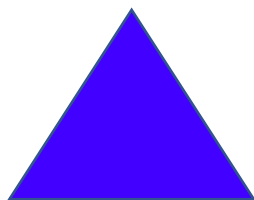


Правильний багатокутник, його види та властивості

З деякими з них ви вже знайомі, а саме: рівносторонній трикутник та квадрат.



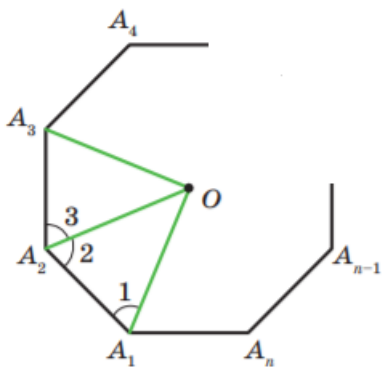
Многокутник називають правильним, якщо в нього всі сторони та всі кути рівні.
Властивості правильного n -кутника.

Властивість 1. Правильний багатокутник є опуклим багатокутником.

Для доведення цієї властивості достатньо показати, що в будь-якому багатокутнику є хоча б один кут, менший від 180° . Тоді з того, що у правильному n -кутнику всі кути рівні, випливатиме, що всі вони менші від 180° , тобто багатокутник буде опуклим.

Оскільки сума кутів n -кутника дорівнює $180^\circ(n - 2)$, тоді кожен з кутів правильного n -кутника дорівнює $\frac{180^\circ(n - 2)}{n}$, що є меншим за 180° . Властивість доведено.

Властивість 2. Будь-який правильний багатокутник є одночасно вписаним і описаним, причому центри його описаного і вписаного кіл збігаються.



Доведення

Нехай у правильному n -кутнику $A_1A_2A_3\dots A_n$ O – точка перетину бісектрис кутів при вершинах A_1 та A_2 . З'єднаємо точки O і A_3 .

Оскільки в трикутниках A_1OA_2 і A_3OA_2 кут 3 дорівнює куту 2, як половини рівних кутів, OA_2 – спільна сторона та A_1A_2 дорівнює A_2A_3 , як сторони правильного багатокутника, то ці трикутники рівні за першою ознакою рівності трикутників. Крім того, трикутник A_1OA_2 рівнобедрений, отже, рівнобедреним є і трикутник A_3OA_2 . Тому OA_1 дорівнює OA_2 дорівнює OA_3 .

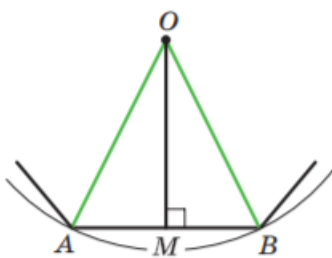
З'єднаючи точку O з іншими вершинами багатокутника, аналогічно можна показати, що OA_3 дорівнює OA_4 дорівнює і так далі дорівнює OA_n . Отже, точка O – центр описаного кола, оскільки вона рівновіддалена від усіх вершин багатокутника.

Згадаємо, що рівнобедрені трикутники, які ми розглядали, є рівними, отже, рівні і їх висоти. Тоді можна зробити висновок, що точка O рівновіддалена від усіх сторін багатокутника. Отже, точка O – центр вписаного кола.

Властивість доведено.

Точку, яка є центром вписаного й описаного кіл, називають центром правильного багатокутника.

Співвідношення між стороною правильного n -кутника та радіусами вписаного й описаного кіл.



На рисунку зображено правильний n -кутник з центром в точці O і стороною a_n .

Кут AOB називають центральним кутом правильного многокутника, тоді

$$\angle AOB = \frac{360^\circ}{n}$$

У рівнобедреному трикутнику проведемо висоту OM , тоді

$$\angle AOM = \frac{180^\circ}{n}$$

Отже, радіус описаного кола дорівнює відрізку OB і дорівнює

$$R_n = \frac{a_n}{2 \sin \frac{180^\circ}{n}}$$

А радіус вписаного кола дорівнює відрізку OM і дорівнює

$$r_n = \frac{a_n}{2 \tan \frac{180^\circ}{n}}$$

Підставивши у ці формули замість n числа 3, 4 і 6, отримаємо наступні формули для знаходження радіусів вписаного та описаного кіл для правильного трикутника, чотирикутника і шестикутника зі стороною a .

Кількість сторін правильного n -кутника	$n = 3$	$n = 4$	$n = 6$
Радіус описаного кола	$R_3 = \frac{a \sqrt{3}}{3}$	$R_4 = \frac{a \sqrt{2}}{2}$	$R_6 = a$
Радіус вписаного кола	$r_3 = \frac{a \sqrt{3}}{6}$	$r_4 = \frac{a}{2}$	$r_6 = \frac{a \sqrt{3}}{2}$

Задачі для самоконтролю

1. Визначити кількість сторін правильного многокутника, якщо його кут на 168° більший за суміжний з ним кут.
2. Навколо кола описано правильний шестикутник зі стороною $4\sqrt{3}$ см. Знайдіть сторону квадрата, вписаного в це коло.