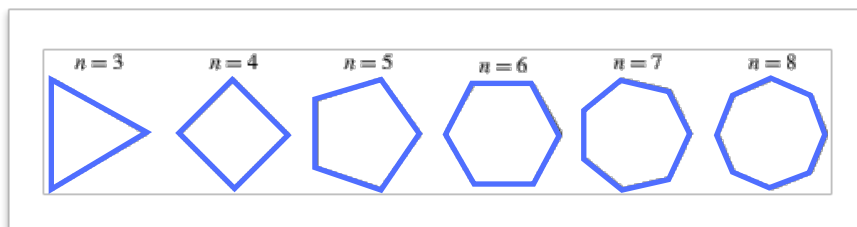
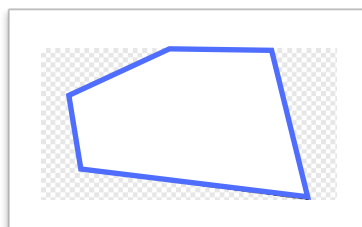


Правильний багатокутник, його властивості

Запам'ятай!

Означення. Многокутник називають правильним, якщо в нього всі сторони рівні та всі кути рівні.

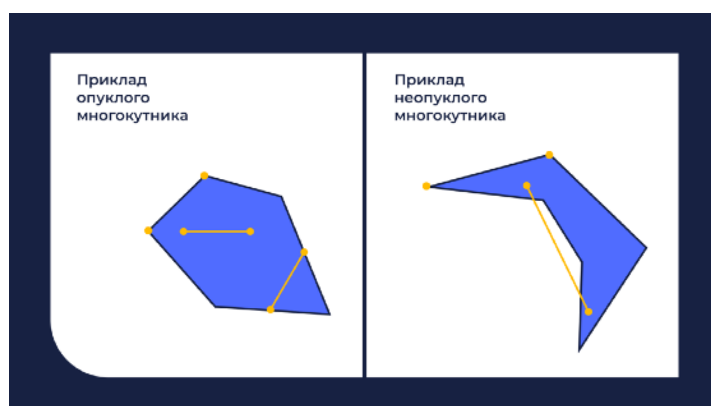


Довільний многокутник Правильні многокутники (n -кількість сторін)

Розглянемо основні властивості правильних многокутників.

Теорема 1. Кожен правильний многокутник є опуклим многокутником.

Пригадаємо, що многокутник називається опуклим, якщо довільний відрізок, що з'єднує дві точки многокутника, лежить у його внутрішній області.



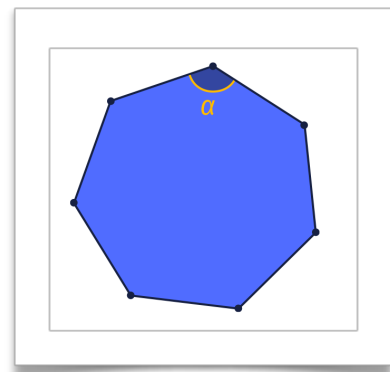
У неопуклому многокутнику можна знайти такі дві точки, що відрізок між ними не буде повністю лежати всередині.

Зверніть увагу: для того, щоб многокутник був опуклим, саме всі відрізки повинні лежати всередині, а не якийсь один. У випадку ж з неопуклим многокутником досить, щоб лише один відрізок не лежав повністю всередині.

Також є еквівалентні означення опуклості, наприклад, многокутник буде опуклим, якщо відносно будь-якої прямої, що проходить через сторону многокутника, многокутник повністю буде розташований у півплощині, утвореній цією прямою (тобто по один бік від прямої).

Теорема 2. Кожен кут правильного n -кутника дорівнює $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$.

Доведення. Позначимо кут правильного n -кутника α° . Сума кутів у n -кутнику дорівнює $180^\circ(n-2)$. Оскільки всі кути многокутника є рівними між собою і їх n , то сума кутів дорівнює αn . Прирівнявши ці два вирази, отримаємо, що $\alpha = \frac{180^\circ(n-2)}{n}$.



Закріпимо ці теореми, розв'язуючи задачі.

Задачі

1. Знайдіть кути правильного 9-кутника.

Розв'язання. Скористаємося теоремою 2: один кут дорівнюватиме $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$, $n=9$, тому один кут дорівнює $\frac{180^\circ(9-2)}{9} = \frac{180^\circ \cdot 7}{9} = 140^\circ$.

2. Чи існує правильний многокутник, кут якого дорівнює 105° ? У разі ствердної відповіді вкажіть кількість сторін многокутника.

Розв'язання. Припустимо, що такий многокутник існує. Нехай n — кількість сторін шуканого правильного многокутника. З одного боку, сума його кутів дорівнює $180^\circ(n-2)$.

З іншого боку, ця сума дорівнює $105^\circ n$. Отже, $180^\circ(n-2) = 105^\circ n$.

Спростивши це рівняння, отримаємо, що $75^\circ n = 360^\circ$; тобто

$n = \frac{360^\circ}{75^\circ} = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5} = 4,8$. Оскільки n має бути натуральним числом, то такого правильного многокутника не існує.

Запам'ятай!

Теорема 3. Будь-який правильний многокутник є як вписаним у коло, так і описаним навколо кола, причому центри описаного та вписаного кіл збігаються.

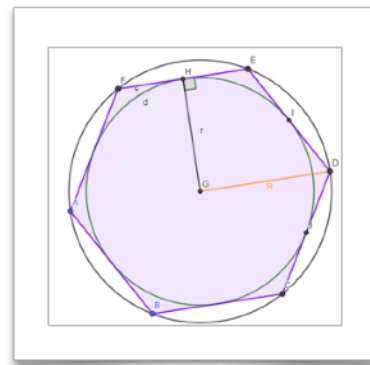
Для початку пригадаємо, що таке вписаний і описаний многокутник.

Многокутник вписаний у коло, якщо всі його вершини лежать на колі.

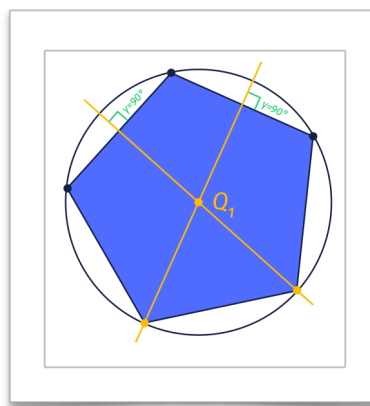
Многокутник описаний навколо кола, якщо всі його сторони дотикаються до кола.

Зверніть увагу, що ці кола будуть різними, якщо многокутник одночасно і вписаний у коло, і описаний навколо кола.

Точку, яка є центром описаного та вписаного кіл правильного многокутника, називають **центром правильного многокутника**.



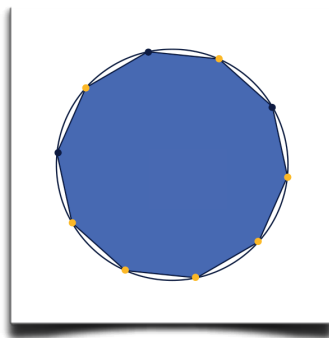
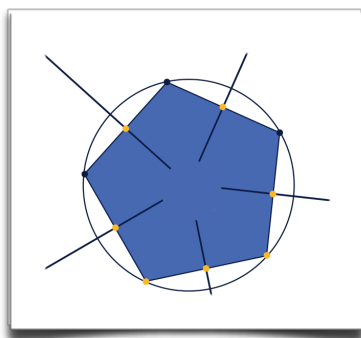
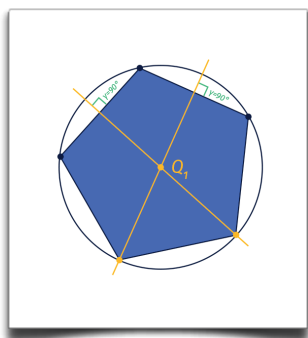
Корисний факт: для того, щоб знайти центр правильного многокутника, достатньо знайти точку перетину серединних перпендикулярів, проведених до двох сусідніх сторін многокутника. Отримана точка і буде центром правильного многокутника.



Задачі

3. Як, маючи побудований правильний n -кутник, можна побудувати правильний $2n$ -кутник?

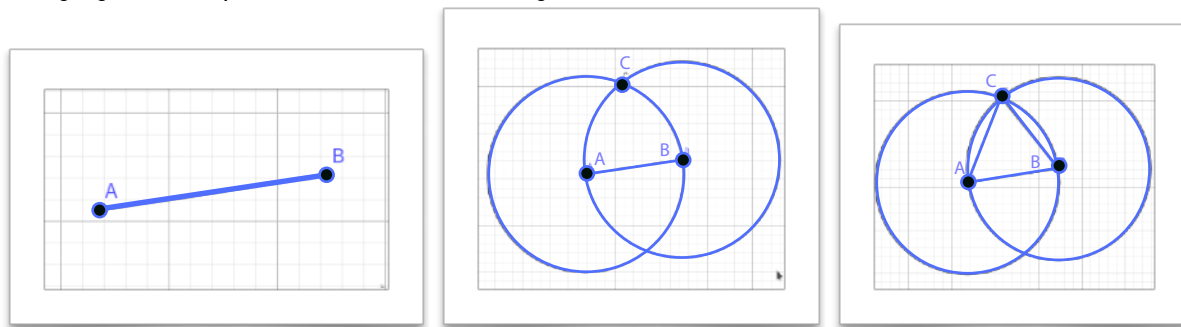
Розв'язання. Для цього спочатку потрібно знайти центр правильного n -кутника, потім середини всіх сторін n -кутника та провести радіуси описаного кола через отримані точки. Тоді кінці радіусів і вершини даного n -кутника будуть вершинами правильного $2n$ -кутника.



4. Як за допомогою циркуля та лінійки побудувати правильний шестикутник?

Розв'язання. З попередньої задачі ми дізналися, що з правильного n -кутника можна побудувати правильний $2n$ -кутник. Побудуємо правильний шестикутник за допомогою правильного трикутника. Побуду-

вати правильний трикутник можна, наприклад, так: беремо відрізок AB фіксованої довжини, будуємо кола з центрами в точках A і B та радіусами, що дорівнюють довжині відрізка AB . Тоді трикутник, утворений точками A і B та однією довільною точкою перетину цих кіл, буде рівностороннім, адже всі сторони дорівнюють довжині відрізка AB . Маючи рівносторонній трикутник, із задачі три впливає, що ми можемо побудувати правильний шестикутник.



Цікаві факти!

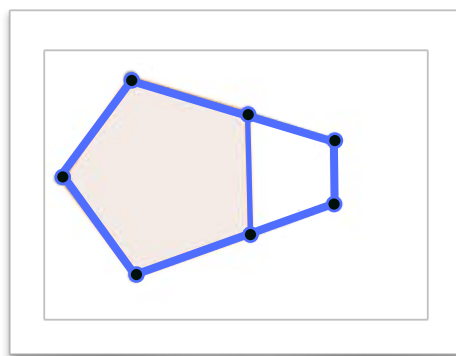
Бджоли будують стільники за допомогою правильних шестикутників. Одна з версій учених, чому так відбувається, полягає в тому, що така форма є найбільш ефективною (у тому сенсі, що потребує менше матеріалів для будівництва).



Задача для самостійного опрацювання

1. Чи існує багатокутник, усі кути якого рівні між собою, але який не є правильним?

Розв'язання. Так, існує. Наприклад, прямокутник. Або якщо в правильному п'ятикутнику змінити одну сторону як зазначено на малюнку, отриманий п'ятикутник уже не буде правильним, бо в нього одна сторона менша за інші.



Література: Геометрія : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір. — Х. : Гімназія, 2017. — 240 с. : іл. ISBN 978-966-474-295-2, стр. 51-61.