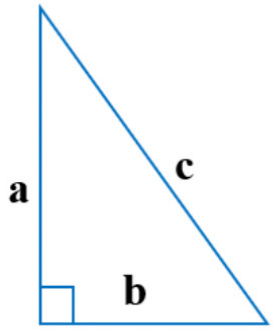
ТЕОРЕМА КОСИНУСІВ. Урок 1

Теорема Піфагора

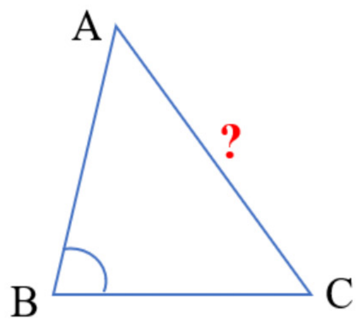
У прямокутному трикутнику квадрат гіпотенузи дорівнює сумі квадратів катетів.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

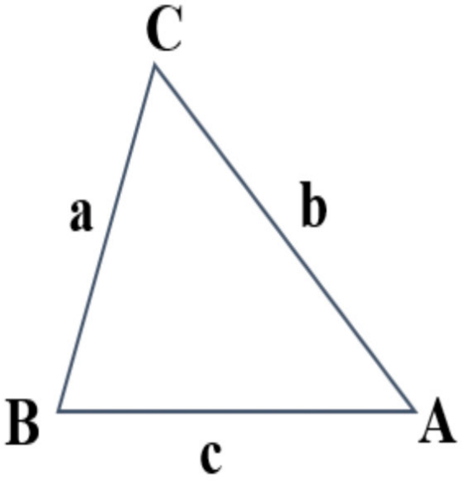
За допомогою теореми Піфагора ми можемо знаходити невідому сторону в прямокутному трикутнику. Але що робити, коли потрібно знайти невідому сторону в довільному трикутнику, коли відомі дві його сторони та кут між ними?

Теорема Косинусів



$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC$$

Якщо скористатися іншими позначеннями для сторін трикутника, то теорему косинусів можна записати таким чином для кожної сторони:



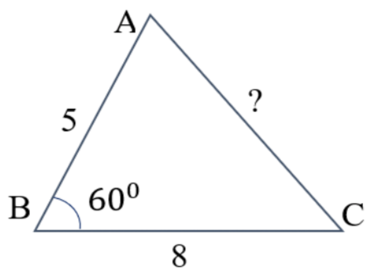
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$$

Зараз доводити цю теорему ми не будемо, але коли вивчатимемо тему “Вектори”, то обов’язково це зробим.

Розглянемо задачу на застосування теореми косинус

У трикутнику ABC відомо сторони AB і BC. AB=5 см, BC= 8 см, а кут між цими сторонами становить 60 градусів.

Знайдіть невідому сторону трикутника ABC.



Застосуємо теорему косинусів:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos \angle B$$
$$AC^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos 60^0 = 25 + 64 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 89 - 40 = 49$$
$$AC^2 = 49$$
$$AC = 7$$
$$AC = -7,$$

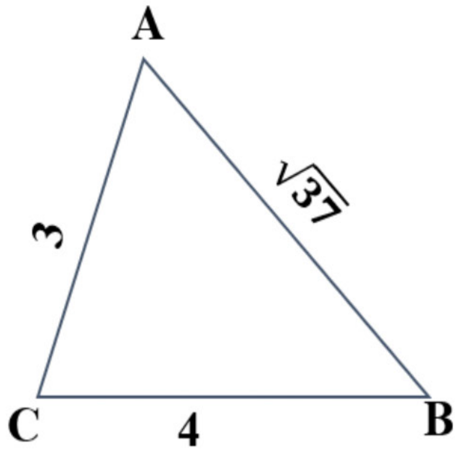
не задовольняє умові задачі, оскільки довжина відрізка не може бути від'ємним числом

Відповідь: AC=7

За допомогою теореми косинусів можна не тільки знаходити невідому сторону трикутника за двома відомими сторонами та кутом між ними, але й знаходити кути трикутника, коли відомі всі його сторони.

Розглянемо задачу:

У трикутнику ABC відомо, що AB= $\sqrt{37}$ см, AC=3 см, BC=4 см. Знайдіть найбільший кут у трикутнику ABC.



Розв'язання

$$\sqrt{37} > \sqrt{36} = 6 > 4 > 3$$

Напроти найбільшої сторони в трикутнику завжди лежить найбільший кут. Тому кут С – найбільший. Знайдемо його величину.

Застосуємо теорему косинусів для сторони AB:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos\angle C$$

$$37=3^2+4^2-2\cdot3\cdot4\cdot\cos\angle C$$

$$37=9+16-2\cdot3\cdot4\cdot\cos\angle C$$

$$37=25-2\cdot3\cdot4\cdot\cos\angle C$$

$$2\cdot3\cdot4\cdot\cos\angle C=-12$$

Виразимо косинус кута С: $\cos\angle C = -\dfrac{12}{2\cdot3\cdot4} = -\dfrac{1}{2}$

Пригадаємо формулу: $\cos\,(180^0 - x) = -\cos x$

$$\cos 60^0 = \frac{1}{2}$$

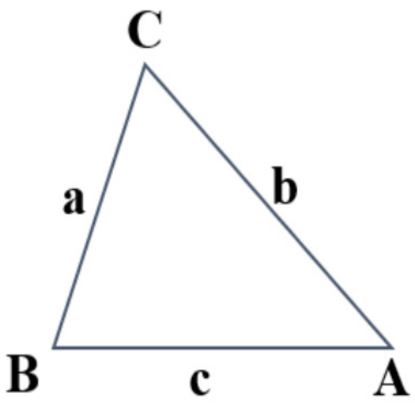
$$-\cos 60^0 = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\,(180^0 - 60^0) = -\cos 60^0 = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 120^0 = -\frac{1}{2}$$

Відповідь: найбільший кут С дорівнює 120^0.

Запишемо загальне правило:



$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Завдання для повторення теоретичного матеріалу

1) Поміркуйте, чому теорему косинусів називають узагальненням теореми Піфагора?
2) Складіть і розв’яжіть задачу на знаходження невідомої сторони трикутника за двома відомими сторонами та кутом між ними.