

ТЕОРЕМА СИНУСІВ



Слово «синус» походить від індійського «джива»
— тятима лука, хорда.



КОРИСНІ ФОРМУЛИ

$$\cos (180^{\circ} - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin (180^{\circ} - \alpha) = \sin \alpha$$

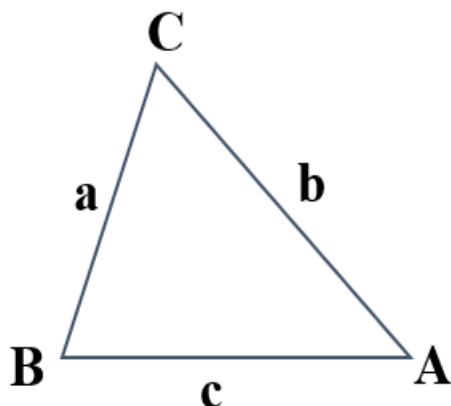
$$\sin (90^{\circ} - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos (90^{\circ} - \alpha) = \sin \alpha$$



На минулих уроках ми познайомилися з теоремою косинусів:

Квадрат сторони трикутника дорівнює сумі квадратів двох інших сторін трикутника мінус подвоєний добуток цих сторін і косинуса кута між ними.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

Ця теорема дозволяє розв'язувати два типи задач:

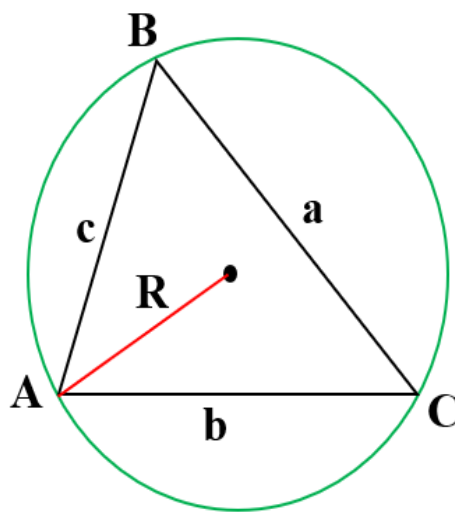
- 1) на знаходження невідомої сторони, коли відомі дві сторони трикутника та кут між ними;
- 2) на знаходження кутів трикутника, коли відомі всі його сторони.

Сторона і два прилеглі кути однозначно визначають трикутник. Отже, за вказаними елементами можна знайти дві інші невідомі сторони трикутника. Теорема косинусів у цьому випадку безсила. На допомогу приходить теорема синусів.

Відношення сторони трикутника до синуса протилежного кута дорівнює двом радіусам кола, описаного навколо трикутника:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

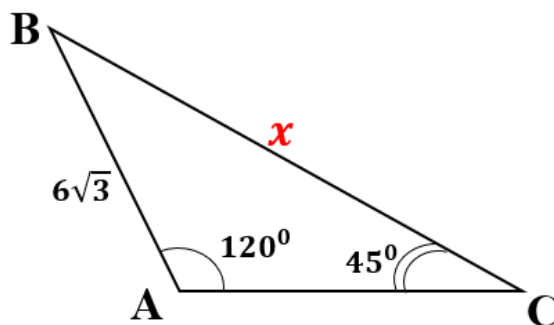
де a, b, c - сторони трикутника,
протилежні кутам A, B, C відповідно,
 R - радіус описаного кола.



Розглянемо задачу



Два кути трикутника дорівнюють 120° і 45° . Сторона, яка лежить проти меншого з них, дорівнює $6\sqrt{3}$ см. Знайти сторону трикутника, яка лежить проти більшого з даних кутів.



Розв'язання

Застосуємо теорему синусів. Оскільки сторони трикутника пропорційні синусам протилежних кутів, ми можемо записати

$$\frac{BC}{\sin 120^0} = \frac{AB}{\sin 45^0}$$

Підставимо відомі значення:

$$\frac{BC}{\sin 120^0} = \frac{6\sqrt{3}}{\sin 45^0}$$

BC – невідомий крайній член пропорції. Щоб його знайти, потрібно добуток середніх членів пропорції поділити на відомий крайній член пропорції, тому

$$BC = \frac{6\sqrt{3} \cdot \sin 120^0}{\sin 45^0}$$

$$\sin 120^0 = \sin(180^0 - 60^0) = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Підставимо значення синусів:

$$BC = \frac{6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$
$$BC = \frac{6\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot 3}{\sqrt{2}} = 9\sqrt{2}$$

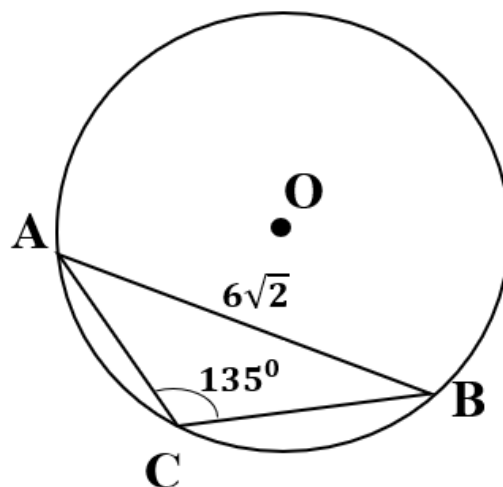
Відповідь: $9\sqrt{2}$ см.

Теорема синусів не тільки дозволяє знаходити невідомі елементи трикутника, вона також допомагає знаходити радіус кола, описаного навколо цього трикутника.

У трикутнику ABC відомо, що

$$AB = 6\sqrt{2} \text{ см}, \angle C = 135^\circ.$$

Знайдіть діаметр кола,
описаного навколо цього
трикутника.



Розв'язання

Скористаємося теоремою синусів:

$$\frac{AB}{\sin \angle C} = 2R$$

$$\frac{AB}{\sin 135^\circ} = 2R$$

$$\sin 135^\circ = \sin (180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Маємо:

$$\frac{6\sqrt{2}}{\sin 45^\circ} = 2R$$

$$6\sqrt{2} : \frac{\sqrt{2}}{2} = 2R$$

Оскільки

$$D = 2R$$

$$D = 6\sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} = 12$$

Відповідь: 12 см.

