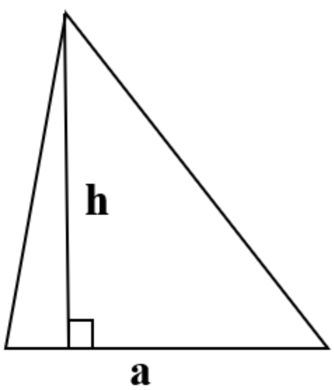
Формули для обчислення площі трикутника

Геометрія складається з трикутників, наче жива людина складається з клітин. Саме тому *трикутник часто називають клітиною геометрії.*

Нагадування

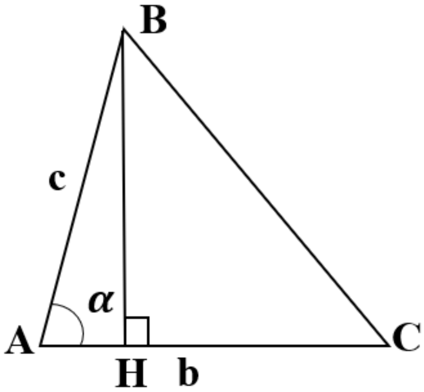


Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторони та висоти, яка проведена до неї.

$$S = \frac{1}{2} a \cdot h$$

Знання тригонометричних функцій дозволяє довести дуже корисну формулу для обчислення площі трикутника. Розв'яжемо задачу:

У трикутнику ABC відомі сторони AB, AC та кут між ними, кут A. Знайдіть площу цього трикутника.



Проведемо висоту BH.

$$S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BH$$

Розглянемо прямокутний трикутник AHB, $\angle H = 90^0$.

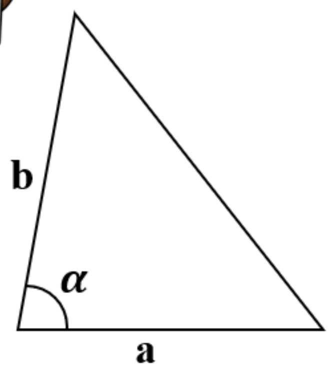
$$\sin A = \frac{BH}{AB}$$

$$BH = AB \cdot \sin A$$

Підставимо у формулу площі:

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot AB \cdot \sin A}$$

Узагальнимо висновки з цієї задачі:



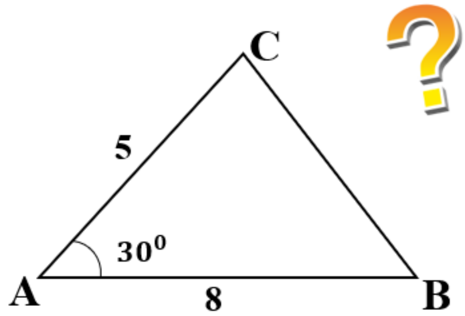
Площа трикутника дорівнює половині добутку його сторін та синуса кута між ними.

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \alpha}$$

Розглянемо задачу:

Обчислити площу трикутника ABC, в якому відомо, що

$AB = 8$ см, $AC = 5$ см, $\angle A = 30^0$.



Розв'язання

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot AB \cdot \sin A$$

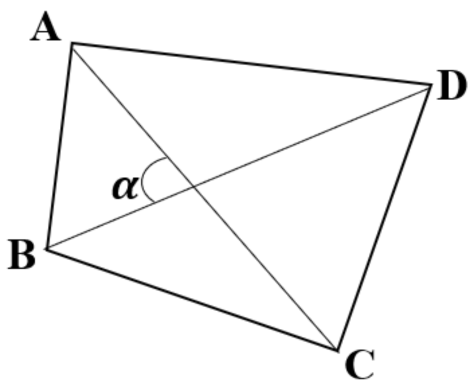
$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 30^0$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8 \cdot \sin 30^0 = \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot \frac{1}{2} = 10$$

$$S = 10 \text{ см}^2$$

Відповідь: 10 см^2

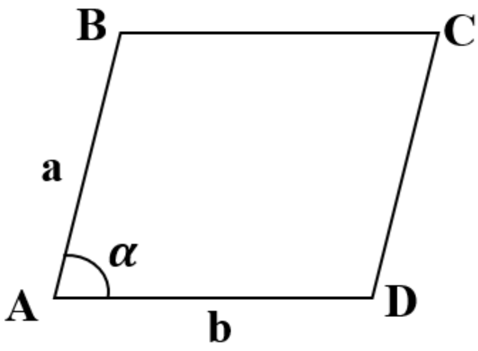
Вищезгадана формула може бути дуже корисною не тільки для обчислення площі трикутника:



Площа опуклого чотирикутника дорівнює половині добутку діагоналей та синуса кута між ними.

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin\alpha$$

Площа прямокутника обчислюється за формулою $S = \frac{1}{2} d^2 \cdot sin\gamma$ де d – діагональ прямокутника, γ – кут між діагоналями	**Площа квадрата** обчислюється за формулою $S = \frac{1}{2} d^2$ де d – діагональ квадрата	**Площа ромба** обчислюється за формулою $S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$ де d_1, d_2 – діагоналі ромба.



Площу паралелограма можна обчислити за формулою

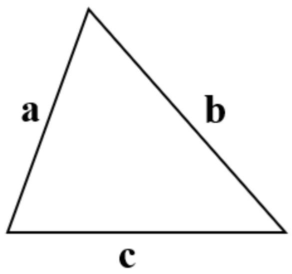
$$S = a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

a, b – довжини сусідніх сторін паралелограма,

α – кут між ними.

Ще одна формула площі трикутника була запропонована давньогрецьким математиком Героном Александрійським. Він жив приблизно в I столітті до нашої ери. Ця формула отримала його ім'я та забезпечила йому визнання. Тільки в XX столітті з'ясувалося, що насправді автором формули був Архімед. Але назву вже ніхто міняти не став.

Формула Герона



Площа трикутника обчислюється за формулою:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

де a, b, c – сторони трикутника,

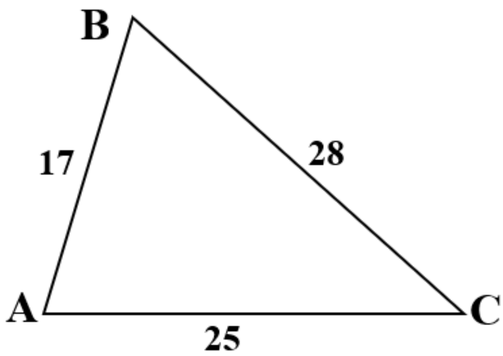
$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Формулу Герона зручно застосовувати, коли ви знаєте всі три сторони трикутника, але не знаєте жодного кута.

Розв'яжемо задачу:

Знайдіть площу трикутника зі

сторонами 17 см, 25 см, 28 см.



Розв'язання

Оскільки в даній задачі ми знаємо всі три сторони трикутника, нам зручно застосувати формулу Герона:

$$\boldsymbol{S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},}$$

де a, b, c – сторони трикутника, $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Обчислимо півпериметр трикутника:

$$p = \frac{17+25+28}{2} = \frac{70}{2} = 35$$

Підставимо в формулу:

$$S = \sqrt{35 \cdot (35-17) \cdot (35-25) \cdot (35-28)}$$

$$S = \sqrt{35 \cdot 18 \cdot 10 \cdot 7}$$

$$S = \sqrt{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 7} = 5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 2 = 21 \cdot 10 = 210$$

Відповідь: 210 см^2

<u>Завдання для самостійної роботи</u>

1) Доведіть, що площа опуклого чотирикутника дорівнює половині добутку діагоналей та синуса кута між ними.
2) Доведіть, що площу паралелограма можна обчислити за формулою

$$S = ab \cdot \sin\alpha$$

a, b – довжини сусідніх сторін паралелограма, α – кут між ними.