

Гармонічні коливання. Рівняння гармонічних коливань. Умови виникнення вільних коливань

Механічні коливання — це рухи тіла (або системи тіл), які відбуваються біля певного положення рівноваги та які точно або приблизно повторюються через рівні інтервали часу. Ми будемо розглядати тільки той різновид коливань, який повторюється точно.

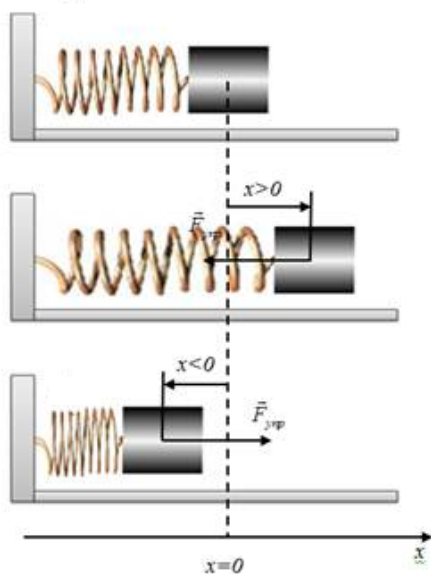
Типові системи, які здійснюють коливання, — пружинний та математичний маятники.

Колівальний рух, як і будь-який інший рух, характеризується такими фізичними величинами, як швидкість, прискорення, координата (зміщення).

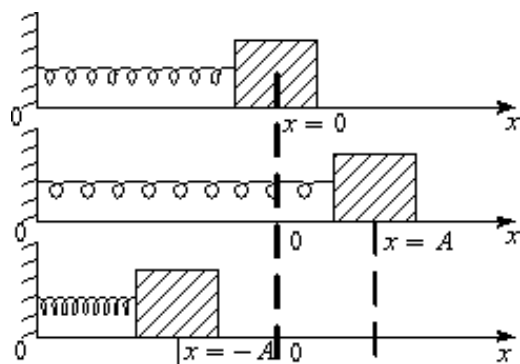
Пружинний маятник. Це тіло, закріплене на пружині, яке коливається під дією сили пружності.

Уведемо систему відліку. Оскільки рух прямолінійний, для його математичного опису достатньо однієї осі x . Початок координат у точці, у якій тіло перебуває в стані рівноваги.

Координата тіла буде дорівнювати відхиленню від положення рівноваги.



Модуль максимального відхилення тіла від положення рівноваги називається **амплітудою коливань**. На відео ми позначали амплітуду як x_m , у конспекті будемо використовувати інше позначення A .



Час, за який здійснюється одне повне коливання, називається **періодом** коливань. Його позначають T .

Кількість коливань, що їх здійснює тіло за одиницю часу, називають **частотою** коливань і позначають ν . Частота та період коливань пов'язані простим співвідношенням $\nu = \frac{1}{T}$, тобто є взаємно оберненими величинами. Одиниця частоти – Герц (Гц).

Усі коливання поділяються на вільні та вимушені, залежно від того, під дією яких сил ці коливання відбуваються.

Вільні коливання – це коливання, які відбуваються під дією внутрішніх сил системи після того, як її було виведено з положення рівноваги. Частота вільних коливань визначається властивостями самої системи. Така частота називається **власною**.

Систему тіл, у якій можуть виникати вільні коливання, називають **коливальною системою**. Ознакою будь-якої коливальної системи є наявність у ній положення стійкої рівноваги. Навколо положення рівноваги й відбуваються вільні коливання. Для виникнення у системі вільних коливань потрібні наступні умови:

1) при відхиленні тіла від рівноважного положення повинна виникати рівнодійна сила, напрямлена до положення рівноваги

2) системі має бути передано надлишкову енергію. Тобто, наприклад, людина має або штовхнути тіло, або відвести його від положення рівноваги та відпустити;

3) тертя в системі має бути досить малим, інакше коливання швидко згаснуть або навіть не виникнуть. Уявіть собі коливання в автомобільному амортизаторі.

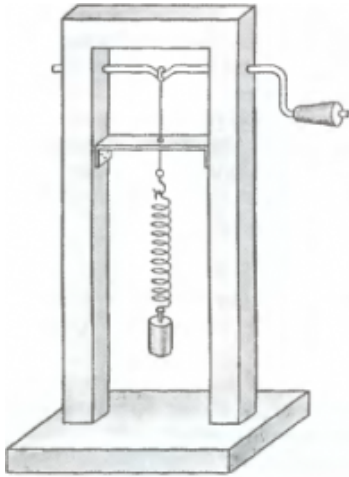
Коливання, амплітуда яких із часом не змінюється, називають **незатухаючими**.

У будь-якій коливальній системі завжди є втрати механічної енергії. Енергія йде на протидію силам тертя, на непружну деформацію тіл. Таким чином, кінетична та потенціальна енергія тіла поступово переходять у його внутрішню енергію.

Коливання, амплітуда яких із часом зменшується, називають **затухаючими**.

Вимушені коливання – це коливання, які відбуваються в системі внаслідок дії зовнішньої сили, що періодично змінюється.

Вимушені коливання – це незатухаючі (протягом часу, поки діє змушуюча сила) коливання, частота яких дорівнює частоті зміни зовнішньої сили, що змушує тіло коливатися. На малюнку наведений приклад системи, що може здійснювати вимушені коливання. Точка підвісу пружинного маятника коливається під дією сили рук людини.



Ми будемо розглядати такі, для яких залежність координати від часу підкоряється закону синуса або косинуса.

$$x = A \cos(\omega t + \varphi_0), \text{ або } x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Така залежність координати від часу виникає за умови, що на тіло діє рівнодійна сила, яка виникає при відхиленні тіла від рівноважного положення і є прямо пропорційною до зміщення тіла. Напрявлена сила в сторону, протилежну до цього зміщення. В яких випадках треба застосовувати синус, а в яких - косинус? Це залежить від так званих початкових умов. Яким чином ми можемо збуджувати коливання? Наприклад, можна відвести маятник від положення рівноваги і відпустити без початкової швидкості. Відхилення буде залежати від часу за законом косинуса, причому початкова фаза буде дорівнювати нулю. Інший випадок - маятнику надають початкової швидкості без попереднього відведення з положення рівноваги. Тоді коливання будуть описуватися законом синуса, теж з нульовою початковою фазою. Ці два приклади можна розглядати як базові випадки, всі інші варіанти будуть комбінацією відведення від положення рівноваги та надання початкової швидкості.

Наведені рівняння ми будемо називати рівняннями гармонічних коливань; у них A — амплітуда коливань,

$$\omega t + \varphi_0$$

- фаза коливань (величина, що однозначно визначає механічний стан тіла у даний момент часу),

$$\varphi_0$$

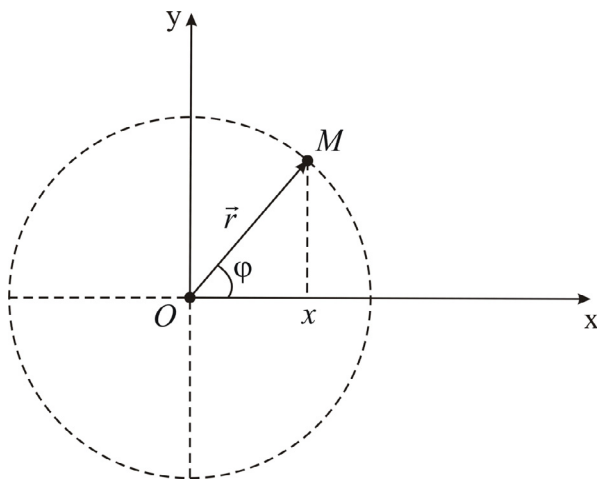
- початкова фаза коливань, тобто значення фази в початковий момент часу. ω – циклічна частота коливань (кількість коливань за 2π секунд), яка дорівнює

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Можна довести, що коли координата тіла змінюється за гармонічним законом, то швидкість і прискорення руху тіла теж змінюються гармонічно.

Довести це можна, зокрема, завдяки наявності певної аналогії між гармонічними коливаннями та обертальним рухом.

Розглянемо рівномірний обертальний рух матеріальної точки. Нехай радіус-вектор, що визначає положення цієї точки відносно плоскої системи відліку XOY , рівномірно обертається навколо центра O з кутовою швидкістю ω .



Розглянемо проекцію радіус-вектора на вісь OX : $x = r \cdot \cos \varphi$, де $\varphi = \omega t + \varphi_0$; φ_0 - кут між радіус-вектором та віссю абсцис у початковий момент часу $t=0$. Маємо $x(t) = r \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$, тобто, рівняння гармонічних коливань матеріальної точки.

Таким чином, проекцію кінця радіус-вектора, що обертається з кутовою швидкістю ω можна розглядати як зміщення точки при гармонічному коливанні, причому циклічна частота коливань дорівнює кутовій швидкості обертання радіус-вектора, а амплітуда коливань – його модулю.

Проекція **швидкості коливань** (величина, що дорівнює зміні із часом координати x) є проекцією на вісь абсцис **вектору лінійної швидкості** точки, що здійснює обертальний

рух. Остання напрямлена по дотичній до кола. Дотична є перпендикулярною до радіус-вектору, це означає, що проекція лінійної швидкості буде мати фазовий зсув на $\pi/2$ відносно $x(t)$, адже кут, що його утворює вектор лінійної швидкості обертання із віссю абсцис, саме на $\pi/2$ відрізняється від кута, утвореного з цією віссю радіус-вектором точки М. Тобто, проекція швидкості коливального руху теж змінюється із часом за гармонічним рівнянням, фаза якого відрізняється від відповідної фази координати на $\pi/2$.

Аналогічні міркування приводять до висновку, що проекція прискорення коливального руху на вісь абсцис теж підкоряється гармонічному закону, але має фазовий зсув відносно координати на π , а відносно швидкості - на $\pi/2$.

При цьому, для амплітудних значень координати, швидкості та прискорення виконуються співвідношення:

$$v_{\max} = \omega x_{\max} ; a_{\max} = \omega^2 x_{\max}$$

Останнє співвідношення також називають рівнянням гармонічних коливань.

Джерела:

1. Фізика (рівень стандарту, за навчальною програмою авторського колективу під керівництвом Локтева В. М.) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / [В. Г. Бар'яхтар, С. О. Довгий, Ф. Я. Божинова, О. О. Кірюхіна] ; за ред. В. Г. Бар'яхтара, С. О. Довгого. — Харків : Вид-во «Ранок», 2018. — 272 с. : іл.
2. Фізика (профільний рівень, за навчальною програмою авторського колективу під керівництвом Локтева В. М.) : підруч. для 10 кл. закл. загал. серед. освіти / І. М. Гельфгат. — Харків : Вид-во «Ранок», 2018. — 272 с. : іл., фот.