

Рівносильні рівняння. Раціональні рівняння

- Два рівняння називають **рівносильними**, якщо вони мають однієї й ті самі корені або кожне з рівнянь не має коренів.
- **Властивості, які перетворюють рівняння на рівносильні рівняння:**
 - якщо до обох частин даного рівняння додати (або від обох частин відняти) одне й те саме число, то отримаємо рівняння, рівносильне даному;
 - якщо який-небудь доданок перенести з однієї частини рівняння в іншу, змінивши його знак на протилежний, то отримаємо рівняння, рівносильне даному;
 - якщо обидві частини рівняння помножити (або поділити) на одне й те саме число, відмінне від нуля, то отримаємо рівняння, рівносильне даному.
- **Раціональне рівняння** — це рівняння, ліва й права частини якого є раціональними виразами.
- Якщо в рівнянні хоча б одна частина є дробово-раціональним виразом, то таке рівняння називають **дробово-раціональним**.
- **Алгоритм розв'язування дробово-раціонального рівняння:**
 1. За допомогою тотожних перетворень звести рівняння до вигляду:

$$\frac{P}{Q} = 0.$$

2. Отримане рівняння буде рівносильне системі:

$$\begin{cases} P = 0 \\ Q = 0. \end{cases}$$

3. Розв'язком будуть отримані корені з першого рівняння системи, причому слід виключити ті, які не задовольняють область допустимих значень, тобто за яких $Q = 0$.



Практичні завдання

Завдання 1

Чи є рівносильними рівняння:

$$1) \quad 6x - 8 = 10 \quad \text{та} \quad \frac{x + 5}{4} = 2?$$

$$6x - 8 = 10$$

$$6x = 18$$

$$x = 3$$

$$\frac{x + 5}{4} = 2$$

$$x + 5 = 8$$

$$x = 3$$

Рівняння мають однакові корені, а отже, є рівносильними.

$$2) \quad x^2 + 16 = 0 \quad \text{та} \quad \frac{4}{(x + 4)(x - 4)} = 0?$$

$$x^2 + 16 = 0$$

$$x^2 = -16$$

Коренів немає.

$$\frac{4}{(x + 4)(x - 4)} = 0$$

Коренів немає, оскільки в чисельнику за жодних значень x не буде 0.
Рівняння рівносильні, оскільки обидва не мають коренів.

Завдання 2

Розв'яжіть рівняння:

1.

$$\frac{(x + 7)(2x - 9)}{x + 4} = 0$$

$$\begin{cases} (x + 7)(2x - 9) = 0 \\ x + 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 7 = 0 \quad \text{або} \quad 2x - 9 = 0 \\ x + 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \quad \text{або} \quad 2x = 9 \\ x \neq -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \quad \text{або} \quad x = 4,5 \\ x \neq -4 \end{cases}$$

$$x = 7 \quad \text{або} \quad x = 4,5$$

Відповідь: $x = 7$ або $x = 4,5$.

2.

$$\frac{(x + 7)(2x - 9)}{x + 4} = 0$$

$$\begin{cases} (x + 7)(2x - 9) = 0 \\ x + 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 7 = 0 \quad \text{або} \quad 2x - 9 = 0 \\ x + 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \quad \text{або} \quad 2x = 9 \\ x \neq -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \quad \text{або} \quad x = 4,5 \\ x \neq -4 \end{cases}$$

$$x = 7 \quad \text{або} \quad x = 4,5$$

Відповідь: $x = 7$ або $x = 4,5$.

3.

$$\frac{x^2 - 49}{x^2 - 7x} = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 49 = 0 \\ x^2 - 7x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 49 \\ x(x - 7) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm 7 \\ x \neq 0 \\ x - 7 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \pm 7 \\ x \neq 0 \\ x \neq 7 \end{cases}$$

$$x = -7$$

Відповідь: $x = -7$.

4.

$$\frac{3x - 18}{x^2 - 36} = 0$$

$$\begin{cases} 3x - 18 = 0 \\ x^2 - 36 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 18 \\ x^2 \neq 36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ x \neq 6 \\ x \neq -6 \end{cases}$$

Рівняння не має коренів

Відповідь: рівняння не має коренів.



Рекомендовані джерела

1. Алгебра. 8 кл. : Збірник задач і контрольних робіт / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, Ю. М. Рабінович, М. С. Якір. Х.: Гімназія, 2021. 96 с. : іл.
2. Алгебра. 8 клас: формуємо і перевіряємо предметні компетентності : навч. посіб. / О. С. Істер. Київ: Генеза, 2021. 175 с. : іл.